

Método Espectral baseado no Emprego de Polinômios de Legendre para a Resolução de Problemas Formulados na Forma Integral

T. F. Ribeiro, L. S. Ferraz, C. H. Kamphorst

Resumo — No presente trabalho são apresentados resultados e discussões acerca da possibilidade do emprego de uma metodologia de caráter analítico, focada na obtenção de soluções fechadas, para problemas formulados via equações integrais. A metodologia consiste no emprego de um método espectral que faz uso de uma expansão truncada em termos de polinômios ortogonais de Legendre. Metodologia similar já fora utilizada por Kamphorst *et al* [1], mediante a proposição de soluções em termos de splines cúbicas de Hermite, associadas ao uso de um esquema de pontos de colocação. Contudo, a metodologia apresentada neste trabalho evidencia três vantagens que podem contribuir para viabilizar sua aplicação a uma classe mais ampla de problemas de interesse físico. A primeira delas consiste na facilidade de manipulação e avaliação dos polinômios ortogonais em sistemas computacionais algébricos. Outra vantagem, proporcionada pelo emprego de expansões em termos de polinômios ortogonais, incide sobre o fato desta metodologia não necessitar de um esquema de pontos de colocação a fim de estabelecer o sistema linear usado para determinar as constantes da solução espectral. A terceira vantagem consiste no fato da metodologia investigada não demandar de expansões com ordens muito elevadas para a obtenção de resultados numéricos com boa precisão. A implementação da solução obtida, para uma equação integral investigada, permitiu a obtenção de resultados numéricos com dezessete casas decimais de precisão, no Maple¹, em um tempo computacional inferior a setenta segundos.

Palavras-Chave: Método Espectral; Polinômios de Legendre; Equações Integrais

T. F. Ribeiro é graduanda do curso de Matemática da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, URI – Câmpus de Frederico Westphalen e bolsista PROBIC/FAPERGS do projeto Metodologia de Caráter Analítico para Resolução de Problemas Formulados na Forma Integral. (e-mail: tatianefontanaribeiro@gmail.com).

L. S. Ferraz é graduando do curso de Matemática da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, URI – Câmpus de Frederico Westphalen e foi bolsista PROBIC/FAPERGS do projeto Metodologia de Caráter Analítico para Resolução de Problemas Formulados na Forma Integral. (e-mail: dede-ferraz@hotmail.com).

C. H. Kamphorst é Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS e professor do Departamento de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, URI – Câmpus de Frederico Westphalen. (e-mail: carmo@uri.edu.br)

¹ É um *software* desenvolvido pela Maplesoft. Consiste em um ambiente de computação simbólica e numérica que possibilita a realização de inúmeras de transformações matemáticas e construções de modelos matemáticos. Neste trabalho, utilizamos o Maple 18.

I. INTRODUÇÃO

A utilização de um método espectral baseado no emprego de expansões truncadas, em termos de splines cúbicas de Hermite, se mostrou eficiente na obtenção de soluções fechadas para problemas clássicos da dinâmica de gases rarefeitos em dutos cilíndricos [2]. A possibilidade de aplicação desta mesma metodologia a uma classe mais ampla de problemas formulados por equações integrais, foi, posteriormente, evidenciada no trabalho de Kamphorst *et al* [1]. E, ante a perspectiva de algumas propriedades dos polinômios ortogonais clássicos poderem potencializar o emprego deste método, se propôs a execução do projeto de pesquisa intitulado “Metodologia de Caráter Analítico para Resolução de Problemas Formulados na Forma Integral”, executado com apoio da FAPERGS², através do qual se busca estudar a viabilidade de aperfeiçoamento do método espectral, utilizado por Kamphorst [2].

No presente trabalho, são apresentados resultados obtidos mediante o emprego de expansões truncadas em termos de polinômios ortogonais de Legendre. Também são apresentados resultados numéricos obtidos a partir da implementação destas soluções no Maple, bem como, as respectivas análises de erro. Ressalta-se a opção pelo Maple devido a facilidade de manipulação algébrica dos polinômios e a viabilidade de implementação do método. Resultados similares poderiam ser obtidos via implementação em C++, Fortran ou Matlab, entre outros.

Salienta-se que os resultados obtidos comprovam a eficiência da metodologia, visto que foi possível a obtenção de resultados numéricos, no Maple, com precisão $\varepsilon \leq 5.85 \cdot 10^{-18}$, em um tempo computacional inferior a setenta segundos. Resultados estes muito animadores do ponto de vista da possibilidade de aperfeiçoamento da metodologia, visto que esta requer o emprego de expansões de ordens muito inferiores, e conseqüentemente que requerem muito menos esforço computacional, se comparado com a metodologia usada por Kamphorst *et al* [1].

II. POLINÔMIOS ORTOGONAIS DE LEGENDRE

Polinômios ortogonais consistem de um sistema de polinômios $\{\phi_r(x)\}_{r=0}^{\infty}$, de ordem r , que satisfaz a condição de ortogonalidade definida a partir do produto interno de dois destes polinômios [1],

² Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul.

$$\begin{aligned} \langle \phi_m(x), \phi_n(x) \rangle &= \int_a^b \omega(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \|\phi_m(x)\|^2, & \text{se } m = n \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

em que $\omega(x)$ corresponde a respectiva função peso e $\|\phi_m(x)\|$ é a norma do polinômio $\phi_m(x)$, definida pela expressão

$$\|\phi_m(x)\| = \sqrt{\langle \phi_m(x), \phi_m(x) \rangle} = \sqrt{\int_a^b \omega(x) [\phi_m(x)]^2 dx} \quad (2)$$

Logo, um sistema de polinômios é definido como sendo ortogonal caso seu produto interno envolvendo polinômios de ordens diferentes é igual a zero, enquanto que o mesmo produto envolvendo dois polinômios de mesma ordem define o quadrado da norma deste polinômio.

Conforme a definição da função peso e dos limites de integração do produto interno, tem-se diferentes tipos de polinômios ortogonais clássicos, são eles, os Polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite. Os polinômios de Jacobi, “[...] são ortogonais no intervalo $[-1,1]$ com relação à função peso $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.” [3]. Os polinômios de Laguerre, “são ortogonais no intervalo $[0, \infty)$, com relação a função peso $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$ ” [4]. E, os polinômios de Hermite, são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$, com relação à função peso $\omega(x) = e^{-x^2}$ [4].

Dentre os polinômios de Jacobi citam-se ainda três casos particulares de polinômios ortogonais: os polinômios de Legendre, os polinômios de Chebyshev de primeira espécie e os polinômios de Chebyshev de segunda espécie. Estes são definidos de acordo com o valor assumido pelos parâmetros α e β , usados para definir sua função peso. Os polinômios de Legendre utilizam os parâmetros $\alpha = \beta = 0$, resultando na função peso $\omega(x) = 1$. Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie utilizam os parâmetros $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, sendo sua função peso $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. E, os polinômios de Chebyshev de segunda espécie fazem uso dos parâmetros $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ e consideram a função peso $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$. [5]

Os polinômios de Legendre de ordem n , denotados por $P_n(x)$, são ortogonais em $x \in [-1,1]$ e podem ser gerados, no Maple, pelo comando $P(n, x)$, em que n deve indicar a ordem do polinômio de Legendre e x é a variável. Todavia este comando só estará disponível ao se fazer uso do pacote ortogonal, digitando-se *with(orthopoly)*. Na Tabela I, são apresentados valores do produto interno de polinômios de Legendre de mesma ordem,

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx, \quad (3)$$

obtidos no Maple, mediante o emprego do comando $\text{int}((P(n, x))^2, x = -1..1)$ com $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

TABELA I
PRODUTO INTERNO DE POLINÔMIOS DE
LEGENDRE DE MESMA ORDEM

n	$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx$
0	2
1	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{2}{5}$
3	$\frac{2}{7}$
4	$\frac{2}{9}$
5	$\frac{2}{11}$
6	$\frac{2}{13}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{2}{2n+1}$

Logo, constata-se que sua relação de ortogonalidade é:

$$\begin{aligned} \langle P_m(x), P_n(x) \rangle &= \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{se } m = n \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Além disso, os polinômios de Legendre satisfazem a fórmula de recorrência,

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{n+1}, \quad (5)$$

em que

$$P_0(x) = 1 \quad (6)$$

e

$$P_1(x) = x, \quad (7)$$

bem como, também satisfazem a fórmula de Rodriguês,

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x^2)\}. \quad (8)$$

Gonçalves [6] apresenta duas propriedades significativas dos polinômios de Legendre:

- Os polinômios de Legendre apresentam a seguinte simetria:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x); \quad (9)$$

- Para $x \in [-1,1]$, tem-se que imagens:

$$|P_n(x)| \leq 1. \quad (10)$$

No Maple, os polinômios de Legendre de ordem n podem ser gerados mediante o emprego do pacote *orthopoly* e o comando $P(n, x)$. Na Figura 1, tem-se a representação gráfica dos polinômios de Legendre de ordem 2, 3, 4, 5 e 19.

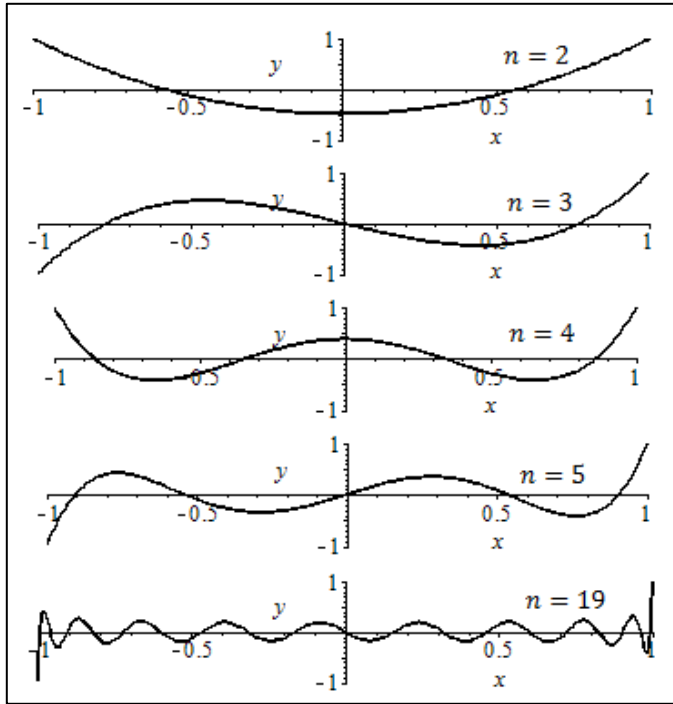


Fig. 1: Polinômios de Legendre $P_n(x)$

Tal como citado por Gonçalves [6] é possível verificar a simetria dos polinômios ortogonais de Legendre, a qual justifica o fato do produto interno entre dois polinômios de ordens diferentes ser sempre nulo. Além disso, percebe-se também, que tanto o domínio quanto a imagem dos polinômios de Legendre pertencem ao intervalo $[-1, 1]$ e que um polinômio de ordem n , possui, exatamente, n zeros reais

III. MÉTODO ESPECTRAL

Denominamos de método espectral a metodologia de resolução de equações que consiste na proposição de soluções na forma de expansões truncadas em termos de funções de base e constantes a determinar de modo a satisfazer a formulação empregada. [2]

Seu emprego para a obtenção de soluções fechadas e de caráter analítico tem sido proposto no estudo de problemas formulados na forma integral, (problemas modelados por equações que possuem operadores integrais). Nestes casos, uma vez que a expansão é proposta de maneira conveniente, promove-se a sua substituição na equação integral e, por meio de artifícios algébricos ou numéricos, se busca estabelecer uma forma para a obtenção das constantes que devem ser determinados de modo que a solução proposta, de fato, satisfaça a equação.

Neste trabalho, busca-se evidenciar a viabilidade do emprego da metodologia contemplando a proposição de expansões truncadas em termos de polinômios de Legendre. Para tanto, considera-se a equação integral de Fredholm de segunda espécie [7]:

$$f(x) = A(x) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(y) \cdot f(y) dy + B(x) \quad (11)$$

em que os termos $A(x)$ e $B(x)$ são definidos pelas expressões:

$$A(x) = -\frac{3}{2\pi} \text{sen}(x) \cos(x) \quad (12)$$

e

$$B(x) = x \text{sen}(2x), \quad (13)$$

com $x \in [-\pi, \pi]$.

Salienta-se ser possível observar que a Eq. (11) possui solução analítica

$$f(x) = (x - 1) \text{sen}(2x). \quad (14)$$

Com o propósito de promover o emprego do método espectral, propõe-se, inicialmente, uma solução para a Eq. (11), na forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^L a_n P_n\left(\frac{x}{\pi}\right), \quad (15)$$

em que L define a ordem da expansão e a_n corresponde às constantes que devem ser determinadas. Nela o argumento dos polinômios de Legendre ($P_n(x)$) é definido por uma razão em termos da constante π , a fim de que, após a substituição da expansão proposta na formulação integral apresentada na Eq. (11), se possa avaliar os polinômios em seu intervalo de definição $x \in [-1, 1]$. Substituindo a Eq. (15) na Eq. (11), torna-se possível escrever

$$\sum_{n=0}^L a_n \left[P_n\left(\frac{x}{\pi}\right) - A(x) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(y) \cdot P_n\left(\frac{y}{\pi}\right) dy \right] = B(x). \quad (16)$$

Promovendo o produto da Eq. (16) pelo termo $P_m\left(\frac{x}{\pi}\right)$ (para $m = 0, 1, 2, \dots, L$) e integrando em $x \in [-\pi, \pi]$, obtém-se a expressão

$$\sum_{n=0}^L a_n \{C_{m,n}^P - D_{m,n}^P\} = E_m^P, \quad (17)$$

em que

$$C_{m,n}^P = \int_{-\pi}^{\pi} P_n\left(\frac{x}{\pi}\right) P_m\left(\frac{x}{\pi}\right) dx, \quad (18)$$

$$D_{m,n}^P = \int_{-\pi}^{\pi} A(x) P_m\left(\frac{x}{\pi}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(y) P_n\left(\frac{y}{\pi}\right) dy dx \quad (19)$$

e

$$E_m^P = \int_{-\pi}^{\pi} B(x) P_m\left(\frac{x}{\pi}\right) dx. \quad (20)$$

Os sobrescritos P , das notações dos termos definidos na Eq. (18) até a Eq. (20), são utilizados com o intuito de evidenciar o emprego dos polinômios de Legendre. Uma vez avaliadas as integrais, a Eq. (17) passa a consistir em um sistema linear algébrico de ordem $L + 1$, cuja solução são as constantes a_n da expansão proposta na Eq. (15). E, conhecidas as constantes a_n , tem-se na Eq. (15) uma solução fechada, válida para todo o domínio de definição, para a equação integral (11).

IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

A fim de obter resultados numéricos para a solução de caráter analítico, estabelecida anteriormente, optou-se por sua implementação no sistema computacional algébrico Maple. Nele, é possível obter a resolução do sistema linear estabelecido pela Eq. (17) através da utilização do comando *linsolve* do pacote *linalg* (pacote de álgebra linear).

A Tabela II apresenta resultados numéricos para a solução espectral dada a Eq. (15) com o parâmetro de entrada $L = 30$ (ordem da expansão utilizada), bem como, o erro absoluto definido pelo módulo da diferença entre a solução exata (S_{Ex}) e a solução espectral (S_{Es}).

TABELA II
RESULTADOS NUMÉRICOS

$\frac{x}{10}$	Solução Espectral com $L = 30$	Erro Absoluto $\varepsilon = S_{Ex} - S_{Es} $
-10π	0.00000000000000000585	$5.85 \cdot 10^{-18}$
-9π	-2.24970889973388421017	$5.4 \cdot 10^{-19}$
-8π	-3.34132224808839832707	$5.0 \cdot 10^{-19}$
-7π	-3.04253903161424273233	$8.4 \cdot 10^{-19}$
-6π	-1.69573435058674718416	$6.2 \cdot 10^{-19}$
-5π	0.00000000000000000011	$1.1 \cdot 10^{-19}$
-4π	1.32641798448865583230	$2.3 \cdot 10^{-19}$
-3π	1.84740616571762035502	$3.8 \cdot 10^{-19}$
-2π	1.54862294924346761468	$4.7 \cdot 10^{-19}$
$-\pi$	0.77244343534151880439	$5.0 \cdot 10^{-19}$
0	0.000000000000000000051	$5.1 \cdot 10^{-19}$
π	-0.40312706924342745395	$5.1 \cdot 10^{-19}$
2π	-0.35349008334684238272	$5.2 \cdot 10^{-19}$
3π	-0.05470686687268678932	$5.2 \cdot 10^{-19}$
4π	0.15084747990370957423	$5.0 \cdot 10^{-19}$
5π	-0.00000000000000000038	$3.8 \cdot 10^{-19}$
6π	-0.52016384600180092510	$8.8 \cdot 10^{-20}$
7π	-1.14042599902393558859	$3.2 \cdot 10^{-19}$
8π	-1.43920921549809118352	$1.5 \cdot 10^{-19}$
9π	-1.07413839514893795248	$1.1 \cdot 10^{-19}$
10π	0.00000000000000000131	$1.31 \cdot 10^{-18}$

Os resultados numéricos apresentados para $L = 30$ foram obtidos no Maple em um tempo computacional inferior a setenta segundos, usando um notebook com processador Intel(R)/I5 de 2,5GHz. Tais resultados possuem uma precisão $\varepsilon \leq 5.85 \cdot 10^{-18}$ (fato que indica um número mínimo de dezessete casas decimais corretas).

Na Figura 2, são apresentadas as representações gráficas da solução exata (linha contínua) e da solução espectral obtida usando $L = 30$ (linha pontilhada). Nela, também pode se observar uma ótima convergência entre os resultados numéricos e a solução exata conhecida.

Na Figura 3, é apresentada a representação gráfica dos erros absolutos da solução espectral, tomando $L = 30$ como parâmetro de entrada. Nela podemos observar que o maior erro absoluto está associado ao valor da variável independente

$x = -\pi$ (limite inferior do intervalo de definição da integral), sendo este igual a $5.85 \cdot 10^{-18}$, conforme também pode ser constatado na Tabela II.

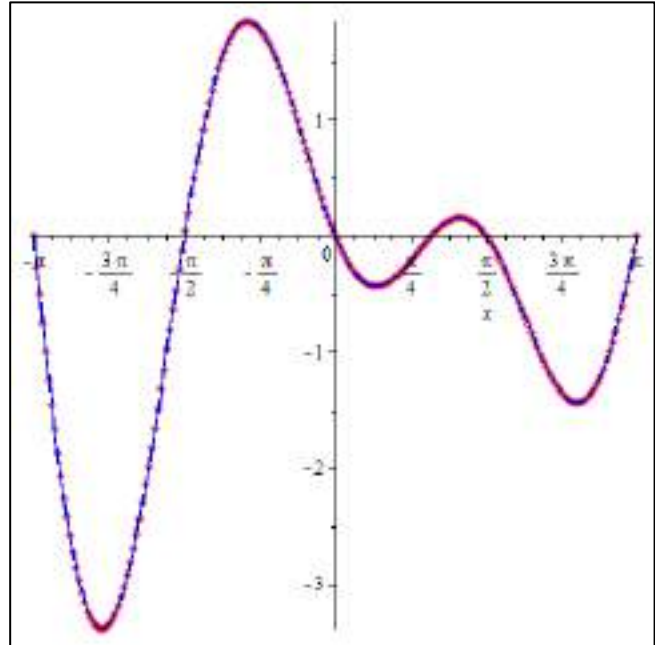


Fig. 2: Solução Exata e Solução de Caráter Analítico

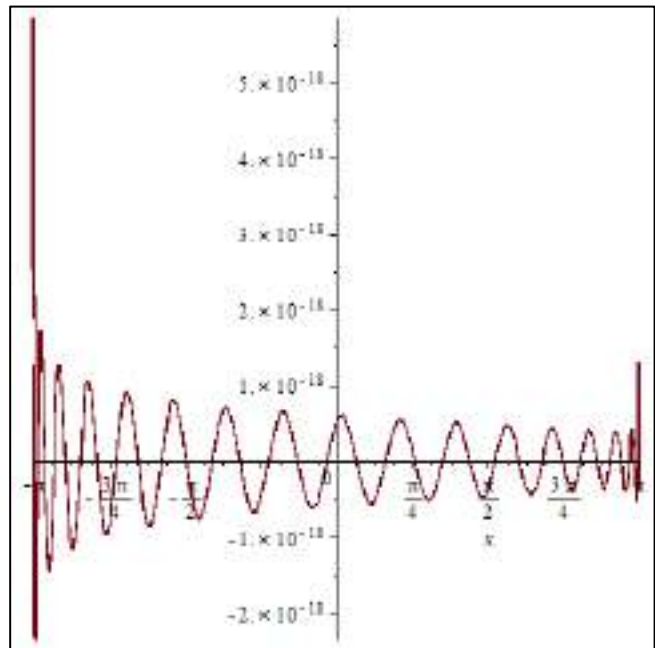


Fig. 3: Erro absoluto com $L = 30$

A precisão dos resultados e o tempo computacional variam muito em razão da ordem da expansão considerada na implementação numérica da solução espectral. Na Tabela III, são apresentados a precisão e o tempo computacional requerido na obtenção de resultados numéricos com diferentes parâmetros de entrada L .

TABELA III
PRECISÃO E TEMPO COMPUTACIONAL

Ordem da Expansão	$L = 15$	$L = 25$	$L = 30$
Precisão	$1,2 \times 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-13}$	$5,85 \cdot 10^{-18}$
Tempo (em s)	5	29,7	69,9

Na Tabela III, também é possível observar que o método espectral converge muito bem, não requerendo esforço computacional demasiado para as ordens de expansão consideradas neste trabalho. Contudo, salienta-se que, dependendo da complexidade da formulação integral considerada tais parâmetros podem variar significativamente, tornando necessário também o emprego de ordens de expansão maiores. Entre os fatores que podem aumentar a complexidade da formulação citam-se a quantidade e a forma como são definidos os termos da equação integral e, especialmente, a possível presença de singularidades em alguns destes termos. O aumento da ordem de expansão L também remete ao cálculo envolvendo sistemas de ordens maiores (de ordem $2L + 2$).

V. CONCLUSÃO

A metodologia que consiste na utilização de um método espectral baseado no emprego de expansões truncadas em termos de polinômios ortogonais clássicos (em especial dos polinômios de Legendre), para a obtenção de soluções de caráter analítico de problemas formulados na forma integral, têm evidenciado a possibilidade de aperfeiçoamento da metodologia utilizada por Kamphorst *et al* [1], que utilizava uma expansão truncada em termos de splines cúbicas de Hermite, associado a um esquema de pontos de colocação.

Um dos aspectos mais promissores para o emprego dos polinômios ortogonais consiste na desnecessidade de uso do esquema de pontos de colocação (artifício numérico que pode acarretar em problemas de instabilidade numérica). Isto foi possível graças a um produto da expressão obtida após a substituição da solução espectral proposta na equação integral pelo respectivo polinômio utilizado na expansão e, a proposição de uma nova integração, resultando, deste modo, após a avaliação das integrais envolvidas, em um sistema linear algébrico que fornece as constantes da solução proposta inicialmente.

O esforço computacional requerido pela metodologia é muito inferior ao respectivo esforço quando empregado a expansão em termos de splines cúbicas (utilizada por Kamphorst *et al* [1]), haja vista que desta forma, não se faz necessário o emprego de expansões com ordens muito elevadas para a obtenção de resultados numéricos com boa precisão. Para o caso do emprego da expansão em termos de polinômios de Legendre, por exemplo, foi possível a obtenção de resultados numéricos com dezessete casas decimais corretas em um tempo computacional inferior a setenta segundos.

Salienta-se que a mesma metodologia já foi testada com o emprego de expansões envolvendo outros polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, os polinômios de Chebyshev

de primeira e segunda espécies, bem como, com os polinômios de Laguerre e Hermite. O emprego dos dois primeiros se mostrou bem promissor, fornecendo resultados numéricos com tempo computacional e precisão próximos dos obtidos mediante o emprego dos polinômios de Legendre. Contudo, a obtenção de resultados numéricos a partir de expansões truncadas em termos de polinômios de Laguerre e Hermite demonstrou-se ser complicada, pelo motivo de demandarem um tratamento numérico a fim de contornar problemas de *overflow* gerados pelos seus intervalos de definição, semi-infinito e infinito, respectivamente, bem como pelos limites infinitos atingidos por estes polinômios.

Um aspecto a ser observado na proposição inicial para a solução consiste da correta definição do argumento do polinômio de modo que, após substituído na formulação integral, seja de fato avaliado em todo o seu intervalo de definição. Assim sendo, dentre todos os casos analisados, a obtenção de resultados numéricos via expansões truncadas em termos de polinômios de Legendre demonstrou demandar o menor esforço computacional para atingir determinada precisão, fato, certamente, relacionado com a maior simplicidade de sua definição, que envolve um intervalo com limites constantes, $x \in [-1,1]$, característico dos polinômios de Jacobi.

VI. REFERÊNCIAS

- [1] C. H. Kamphorst; E. M. Kamphorst; G. A. Grassi. Soluções de Caráter Analítico para Problemas formulados na forma Integral. "Revista Junior de Iniciação Científica em Ciências Exatas e Engenharia", v. 1, 2014, p. 1-8.
- [2] C. H. Kamphorst. "Fluxo de Gases Rarefeitos em Dutos Cilíndricos: Uma abordagem via Equações Integrais", Tese de Doutorado. Porto Alegre, UFRGS, 2009.
- [3] F. N. Niime. "Polinômios Ortogonais em Várias Variáveis". Dissertação de mestrado. São José do Rio Preto, Universidade Estadual Paulista, 2011. Disponível em: <http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/86506/niime_fn_me_sjrp.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 06. nov. 2014.
- [4] C. F. Bracciali; E. X. L. de Andrade. "Zeros de Polinômios Ortogonais: Interpretação Eletrostática e Análise de Frequências". III Biental da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Disponível em: <<http://mat.ufg.br/biental/2006/mini/e.cleonice.pdf>>. Acesso em: 30. set. 2014.
- [5] M. H. Campetti. "Polinômios Ortogonais e L-Ortogonais Associados a Medidas Relacionadas". São José do Rio Preto, 2011, 115 f. Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus de São José do Rio Preto. Disponível em: <http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94202/campetti_mh_me_sjrp.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 06. nov. 2014.
- [6] J. L. Gonçalves; D. N. Kozakevich, "Introdução à Aproximação de Funções". Florianópolis, 2004, 72 f. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática Licenciatura, Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96553/Joao_Luis_Goncalves.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 29. out. 2014.
- [7] T. L. F. Monção; W. Oliveira. "Análise Numérica de Problemas Envolvendo Equações Diferenciais Parciais e Equações Integrais Através de Funções de Base Radial". Itajubá - MG, 2012, 109 f. Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Disponível em: <<http://saturno.unifei.edu.br/bim/0040005.pdf>>. Acesso em: 26 mar. 2015.