

# Controle de Um Oscilador Não Ideal Modelado com Materiais Não Lineares e Inteligentes

Édiblu S. César, Jorge L. P. Felix

**Resumo** — Estudos sobre o comportamento dinâmico de estruturas não lineares e não ideais com materiais inteligentes envolvidos na rigidez e amortecimento, ao longo das últimas décadas, têm gerado extensas pesquisas. Este trabalho apresenta um estudo sobre a influência de um oscilador de material viscoelástico com memória aplicada a um sistema linear ou não linear sob a excitação de um motor de potência limitada. Os materiais não lineares consistem da não linearidade da rigidez e amortecimento que vem da modelagem matemática da estrutura, devido às características da geometria e propriedades físicas do material. Os materiais inteligentes são aqueles cuja geometria e ou propriedades físicas (mecânicas, elétricas e térmicas) podem ser variadas de forma controlada, mediante a variação das condições ambientais. O fenômeno não ideal consiste a influência das respostas de oscilação e a presença do efeito Sommerfeld entre o sistema principal e o motor elétrico de potência limitada.

**Palavras-chave** — Materiais Inteligentes, Sistema Não Ideal, Sistemas não Lineares, Absorvedor Dinâmico Viscoelástico.

## I. INTRODUÇÃO

Os materiais inteligentes são aqueles cuja geometria e/ou propriedades físicas (mecânicas, elétricas, térmicas, etc.) podem ser variadas de forma controlada, mediante a variação das condições ambientais (Temperatura, Campo elétrico, Campo magnético, etc.). Uma das principais características destas ligas é que estas possuem duas fases no estado sólido.

É usual desconsiderar no modelo matemático, a influência do movimento do próprio sistema em sua excitação. Todavia, em muitos casos, esta simplificação, no modelo matemático, não é razoável, devendo-se levar em conta que a excitação ou sua fonte, é influenciada pela própria resposta do sistema.

Além de analisar as respostas de sistemas não lineares, também estudamos a resposta da fonte de energia, e esta por sua vez pode ser ideal ou não ideal. Uma fonte de energia não ideal é aquela que age sobre um sistema vibratório e, ao mesmo tempo, experimenta uma ação recíproca do sistema. Tem-se assim, um sistema vibratório não ideal, ou um sistema com fonte de excitação não ideal. O sistema ideal é o tradicional onde não consideramos este fenômeno [1]. Este é conhecido

como *efeito de Sommerfeld* e no presente trabalho ele surge quando a velocidade angular do eixo do motor é capturada na região de ressonância e varia ao longo do tempo causando instabilidade no motor e na estrutura até alcançar um ponto crítico de tensão elétrica, quando o alcança o sistema apresenta um salto e depois entra em estabilidade.

Neste trabalho foi utilizado um material viscoelástico, ou seja, uma barra de material inteligente, fortemente influenciada pela temperatura e pela frequência empregada [2], será usada para confeccionar o modelo de um absorvedor. Esta barra é dita viscoelástica, pois substitui, no sistema, a mola e o amortecedor viscoso [3]. Um absorvedor viscoelástico é mais facilmente projetado, construído de forma mais simples e de baixo custo, daí sua grande vantagem sobre outros dispositivos.

Neste trabalho, observou-se o comportamento dinâmico na passagem da região de ressonância (a possível existência de movimento regular e caótico) do modelo proposto através do histórico no domínio do tempo, Retratos de Fase, Expoentes de Lyapunov e FFT usando as ferramentas numéricas do programa MATLAB® permitindo dessa forma uma análise de condições de estabilidade e instabilidade dos modelos.

## II. CONSIDERAÇÕES DO PROBLEMA EM QUESTÃO

A Fig. 1, mostra uma estrutura de massa  $m_1$  cujo movimento está na direção vertical  $x_1$  acoplada a um motor elétrico de potência limitada, de velocidade angular  $\dot{\phi}$ , de momento de inércia  $I$  e de equação característica do motor  $L(\dot{\phi}) = v_2 - v_1\dot{\phi}$  (onde  $v_1$  está relacionada com a tensão aplicada através da armadura do motor de corrente contínua e  $v_2$  é uma constante inerente do modelo de motor de corrente contínua considerado), através de uma mola de elasticidade linear  $k_1$  e uma manivela de raio  $r$ . O absorvedor possui massa  $m_2$ , fixado a uma barra de material viscoelástico com memória de elasticidade  $k_e$  e seu movimento se dá na direção vertical  $x_2$ .

potência limitada, de velocidade angular  $\dot{\varphi}$ , de momento de inércia  $I$  e de equação característica do motor  $L(\dot{\varphi}) = v_2 - v_1\dot{\varphi}$  (onde  $v_1$  está relacionada com a tensão aplicada através da armadura do motor de corrente contínua e  $v_2$  é uma constante inerente do modelo de motor de corrente contínua considerado), através de uma mola de elasticidade linear  $k_1$  e uma manivela de raio  $r$ . O absorvedor possui massa  $m_2$ , fixado a uma barra de material viscoelástico com memória de elasticidade  $k_e$  e seu movimento se dá na direção vertical  $x_2$ .

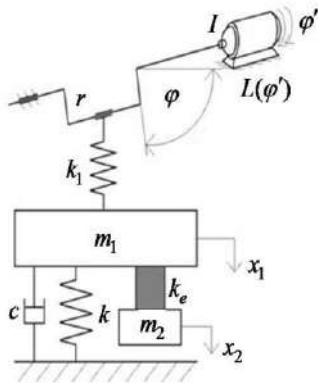


Fig. 1. O sistema não ideal acoplado a um Absorvedor Dinâmico Viscoelástico.

Assumindo que a temperatura  $T$  permanece constante, temos que a força ao longo da barra viscoelástica é dada por [4]:

$$f(t) = f^e(x(t)) - \frac{G_0}{\gamma(T)} \int_0^\infty e^{-(s/\gamma(T))} \frac{x^2(t-s) - x^2(t)}{x^2(t)} ds \quad (1)$$

E introduzindo a função auxiliar que define o amortecimento dependente do tempo e temperatura:

$$\zeta(t) = \int_0^\infty e^{-(s/\gamma(T))} \frac{x^2(t-s) - x^2(t)}{x^2(t)} ds \quad (2)$$

onde  $x$  denota a posição da barra viscoelástica;

$\gamma(T)$  é o tempo de relaxação dependente da temperatura descrito para polímeros pela fórmula de Williams-Landel-Ferry:

$$\gamma(T) = \gamma_0 e^{\psi(T)}, \quad \psi(T) = \frac{c_1(T-T_0)}{c_2 + T - T_0} \quad (3)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes positivas do material e dependem da temperatura de referência  $T_0$ . Para borrachas, a expressão é muito bem aproximada por, [4]:

$$\psi(T) = \frac{-8.86(T-T_s)}{101.6 + T - T_s} \quad (4)$$

onde  $T_s$  é uma temperatura de referência dependente do material que normalmente se encontra sobre  $-223.14998^\circ\text{C}$  acima da temperatura de transição do vidro, e portanto, encontra-se aproximadamente em uma faixa entre  $-73.14998^\circ\text{C}$  e  $26.85^\circ\text{C}$  [4].

Assim, apresentam-se as equações que governam o sistema da Fig. 1:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 + kx_1 = k_1 r \sin \varphi + k_e(x_2 - x_1) - \frac{G_0}{\gamma(T)} \zeta(t)$$

$$I \ddot{\varphi} = L(\dot{\varphi}) + k_1 r(x_1 - r \sin \varphi) \cos \varphi$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_e(x_2 - x_1) + \frac{G_0}{\gamma(T)} \zeta(t)$$

$$\dot{\zeta}(t) = -\frac{G_0}{\gamma(T)} \zeta(t) - 2 \frac{G_0}{L_0} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (5)$$

onde  $L_0$  é o comprimento de referência não deformado da barra viscoelástica e  $G_0$  é o módulo de relaxamento positivo. A simbologia apresentada nas equações anteriores,  $(\dot{\quad})$  e  $(\ddot{\quad})$  representam a primeira e a segunda derivada em relação ao tempo  $t$ , respectivamente.

Das Eqs. (5), as duas primeiras equações representam as equações de movimento do sistema não ideal, enquanto as duas últimas representam as equações de movimento do Absorvedor Dinâmico de Vibrações.

As quatro equações anteriores regem um sistema de uma estrutura linear acoplada a um motor não ideal, e a um absorvedor dinâmico viscoelástico linear. Portanto, note que se considerarmos  $\dot{\varphi} = \omega$ , o sistema chama-se ideal. Ou ainda, se  $\dot{\zeta}(t) = 0$ , então o absorvedor deixa de ser um viscoelástico com memória.

Com o objetivo de analisar o desenvolvimento do sistema (5), é conveniente que os parâmetros e variáveis sejam adimensionais. Definindo o tempo adimensional  $\tau = \omega_0 t$ ,

onde  $\omega_0 = \sqrt{k/m_1}$  é a frequência natural da estrutura.

Definindo os seguintes parâmetros adimensionais:  $\mu = \frac{c}{m_1 \omega_0}$ ,

$$\eta_1 = \frac{k_1 r}{k L_0}, \quad \eta_2 = \frac{k_1 m_1 L_0 r}{I k}, \quad \eta_3 = \frac{k_1 m_1 r^2}{2 I k}, \quad a = \frac{v_1}{I \omega_0^2}, \quad b = \frac{v_2}{I \omega_0}, \quad \lambda =$$

$$\frac{G_0}{k L_0}, \quad \delta = \frac{k_e}{k} \text{ e } \alpha = \frac{m_1}{m_2}. \text{ E utilizando também: } u_1 = \frac{x_1}{L_0}, \quad u_2 = \frac{x_2}{L_0},$$

$$u_3 = \frac{\zeta}{\gamma}. \text{ Defina-se } \rho = \gamma \omega_0, \text{ como o parâmetro de variação de}$$

temperatura do absorvedor viscoelástico. A Eq. (5) em sua forma adimensional seria:

$$u''_1 + \mu u'_1 + u_1 = \eta_1 \sin \varphi + \delta(u_2 - u_1) - \lambda u_3$$

$$\varphi'' = a - b \varphi' + \eta_2 u_1 \cos \varphi - \eta_3 \sin 2\varphi$$

$$u''_2 = -\alpha \delta(u_2 - u_1) + \alpha \lambda u_3$$

$$u'_3 = -\frac{1}{\rho} u_3 - 2(u'_2 - u'_1) \quad (6)$$

A simbologia apresentada nas equações anteriores ( $'$ ) e ( $''$ ), representam a primeira e a segunda derivada em relação ao tempo adimensional  $\tau$ , respectivamente.

Agora, assumindo que  $y_1 = u_1$ ,  $y_2 = u'_1$ ,  $y_3 = \varphi$ ,  $y_4 = \varphi'$ ,  $y_5 = u_2$ ,  $y_6 = u'_2$  e  $y_7 = u_3$ , o sistema (6) transforma-se em um sistema de primeira ordem nas variáveis de estado:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= -\mu y_2 - y_1 + \eta_1 \sin y_3 + \delta(y_5 - y_1) - \lambda y_7 \\ y'_3 &= y_4 \\ y'_4 &= a - b y_4 + \eta_2 y_1 \cos y_3 - \eta_3 \sin 2y_3 \\ y'_5 &= y_6 \\ y'_6 &= -\alpha \delta(y_5 - y_1) + \alpha \lambda y_7 \\ y'_7 &= -\frac{1}{\rho} y_7 - 2(y_6 - y_2) \end{aligned} \quad (7)$$

Para um *sistema ideal* considera-se que a velocidade angular do motor seja constante, nesse caso  $\dot{\varphi} = \omega$ . Por conseguinte, não se considera a equação do motor da Eq. (5), obtendo-se a seguinte forma:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 + k x_1 &= k_1 r \sin(\omega t) + k_e(x_2 - x_1) - \frac{G_0}{\gamma(T)} \zeta(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_e(x_2 - x_1) + \frac{G_0}{\gamma(T)} \zeta(t) \\ \dot{\zeta}(t) &= -\frac{G_0}{\gamma(T)} \zeta(t) - 2 \frac{G_0}{L_0} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{aligned} \quad (8)$$

Utilizando os mesmos parâmetros adimensionais apresentados anteriormente, convenientes para este sistema, tem-se:

$$\begin{aligned} u''_1 + \mu u'_1 + u_1 &= \eta_1 \sin(\Omega \tau) + \delta(u_2 - u_1) - \lambda u_3 \\ u''_2 &= -\alpha \delta(u_2 - u_1) + \alpha \lambda u_3 \\ u'_3 &= -\frac{1}{\rho} u_3 - 2(u'_2 - u'_1) \end{aligned} \quad (9)$$

Onde:  $\mu = \frac{c}{m_1 \omega_0}$ ,  $\eta_1 = \frac{k_1 r}{k L_0}$ ,  $\lambda = \frac{G_0}{k L_0}$ ,  $\delta = \frac{k_e}{k}$ ,  $\alpha = \frac{m_1}{m_2}$ ,  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  e  $u_1 = \frac{x_1}{L_0}$ ,  $u_2 = \frac{x_2}{L_0}$ ,  $u_3 = \frac{\zeta}{\gamma}$ , e ainda  $\rho = \gamma \omega_0$ . Agora, considerando que:  $y_1 = u_1$ ,  $y_2 = u'_1$ ,  $y_3 = u_2$ ,  $y_4 = u'_2$ ,  $y_5 = u_3$  e  $y_6 = \Omega \tau$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= -\mu y_2 - y_1 + \eta_1 \sin y_6 + \delta(y_3 - y_1) - \lambda y_5 \\ y'_3 &= y_4 \end{aligned}$$

$$y'_4 = -\alpha \delta(y_3 - y_1) + \alpha \lambda y_5$$

$$y'_5 = -\frac{1}{\rho} y_5 - 2(y_4 - y_2)$$

$$y'_6 = \Omega \quad (10)$$

### III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para as simulações numéricas dos sistemas de equações anteriores usou-se o integrador ODE23 do MATLAB® em base do algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem com passo variável.

Para as simulações numéricas foram escolhidos os valores dos parâmetros apresentados na tabela 1 para o sistema ideal, e na tabela 2 para o sistema não ideal, enquanto as condições iniciais foram mantidas de valores a zero em ambos os casos.

TABELA I  
VALORES DOS PARÂMETROS ADIMENSIONAIS DO SISTEMA IDEAL

Parâmetro	Valores
$\eta_1$	0.3
$\mu$	0.01
$\delta$	0.1
$\alpha$	8
$\lambda$	0.3
$\rho$	0.05

TABELA II  
VALORES DOS PARÂMETROS ADIMENSIONAIS DO SISTEMA NÃO IDEAL

Parâmetro	Valores
$\eta_1$	0.3
$\eta_2$	0.4
$\eta_3$	0.2
$\mu$	0.01
$\delta$	0.1
$b$	1.5
$\alpha$	8
$\lambda$	0.3
$\rho$	0.1

Note que na tabela 2 não está presente os valores para o parâmetro  $a$ , pois este parâmetro é o parâmetro de controle e refere-se à tensão aplicada à armadura do motor elétrico.

#### A. Comportamento Dinâmico do Sistema Ideal

Nesta seção utilizam-se as curvas de ressonância, retrato de fase, serie no domínio do tempo, FFT e expoentes de Lyapunov para análise do sistema de Eq. (9).

Na Fig. 2 se define a curva de ressonância que mostra os traços dos pontos que são as amplitudes de oscilação da estrutura para movimento de regime permanente versus a frequência adimensional  $\Omega$  da fonte de excitação ideal obtidas

dos resultados numéricos da Eq. (10) entorno da região de ressonância  $\Omega=1$ . Os traços de cor preto correspondem as respostas da estrutura sem Absorvedor Dinâmico Viscoelástico enquanto os traços de cor azul correspondem as respostas da estrutura com Absorvedor Dinâmico Viscoelástico.

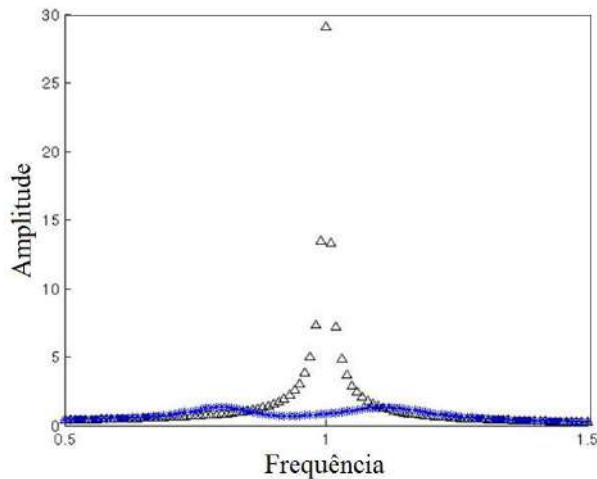


Fig. 2. Curva Amplitude versus Frequência para um sistema Ideal.

Utilizando uma faixa de frequência de  $0.5 \leq \Omega \leq 1.5$  que correspondem a passagem pela região de ressonância, considerando um acréscimo na frequência de  $\Delta\Omega = 0.01$ , ao longo de um intervalo de tempo adimensional de  $0 \leq \tau \leq 1000$ . Para os demais parâmetros adimensionais que representam o sistema foram considerados os valores apresentados na tabela 1. Observa-se a partir da Fig. 2, a estrutura sem absorvedor, apresenta um pico que corresponde a amplitude maior de valor aproximado a 29.0606 (valor informado pelo MATLAB), na sua região de ressonância ( $\Omega \approx 1$ ). Quando acionamos o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico na estrutura, suas amplitudes são reduzidas drasticamente. Além disso, observa-se que o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico, embora elimine a vibração na frequência aplicada conhecida  $\omega$ , introduz duas novas frequências de ressonância  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  em torno da frequência da estrutura  $\Omega$ , nas quais a amplitude do sistema apresenta um acréscimo [5, p 328]. Estas duas novas frequências são apresentadas na Fig. 3, onde estão indicadas pelas flechas.

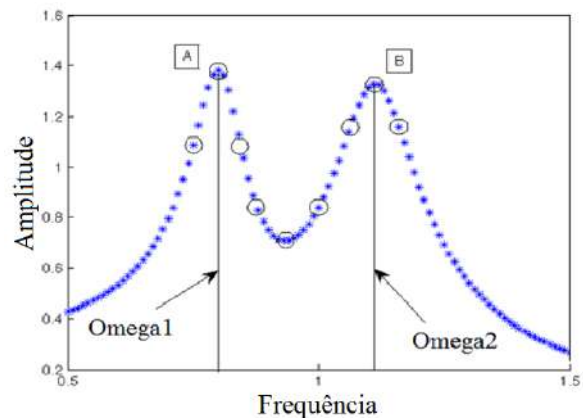


Fig. 3. Frequências de ressonância  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  introduzidas pelo Absorvedor Dinâmico Viscoelástico.

Constata-se que um Absorvedor de Vibrações otimamente sintonizado, ou seja, mais eficiente é aquele cujas ordenadas dos pontos A e B, mostrados na Fig. 3, são iguais. Essa condição exige que [5, p. 330]:

$$f = \frac{1}{1+\varepsilon} \quad (11)$$

Onde  $f = \omega_a/\omega_0$ , é a razão de frequências naturais, onde  $\omega_a$  é a frequência natural do absorvedor, definida por  $\omega_a = \sqrt{k_e/m_2}$ .  $\varepsilon = m_2/m_1$ , é a razão inversa das massas, ou seja, a massa do absorvedor dividida pela massa principal.

Na continuação, pode-se comprovar através de ferramentas da dinâmica não linear (retrato de fase, séries no domínio do tempo, FFT e expoentes de Lyapunov) que neste sistema ideal e linear não há existência do Efeito Sommerfeld (*Jump*), bem como comportamento caótico, e portanto apresenta um movimento periódico, que pode ser representado pela Figura 4.

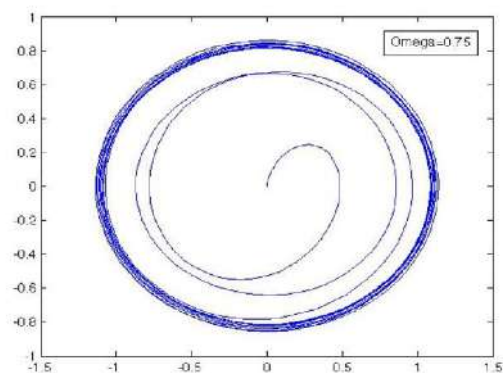


Fig. 4. Retrato de fase para o sistema ideal, quando  $\Omega = 0.75$ .

A Fig. 4 apresenta o retrato de fase da estrutura ideal com o absorvedor ativo, quando a frequência  $\Omega$  assumi valores nos quais suas ordenadas apresentam picos (dois para cima e um para baixo), como mostrados anteriormente na Fig. 3.

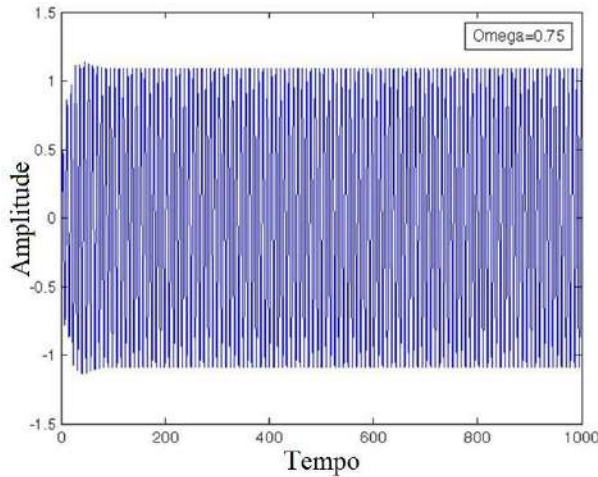


Fig. 5. Serie temporal para o sistema ideal, quando  $\Omega = 0.75$ .

Na Fig. 5 apresenta-se a serie temporal correspondente à frequência ( $\Omega$ ) apresentada na Fig. 3. A Fig. 5 ajuda visualizar o comportamento periódico no estado permanente do sistema no domínio do tempo.

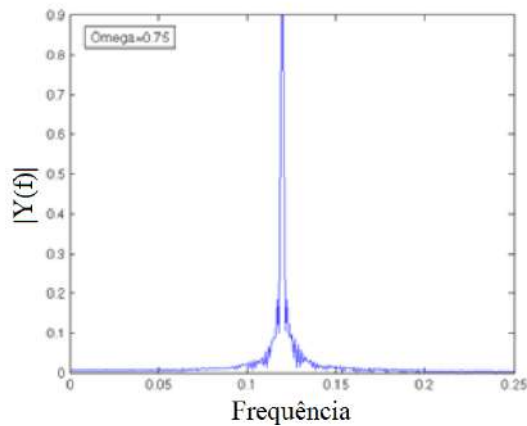


Fig. 6. FFT (Fast Fourier Transform) para o sistema ideal, quando  $\Omega = 0.75$ .

Usou-se a ferramenta FFT da dinâmica não linear para comprovar os resultados obtidos anteriormente nas Figuras 4 e 5. A Fig. 6 mostra o espectro de frequência para o mesmo valor de  $\Omega$  assumido anteriormente para o resultado mostrado nas figuras 4 e 5, respectivamente.

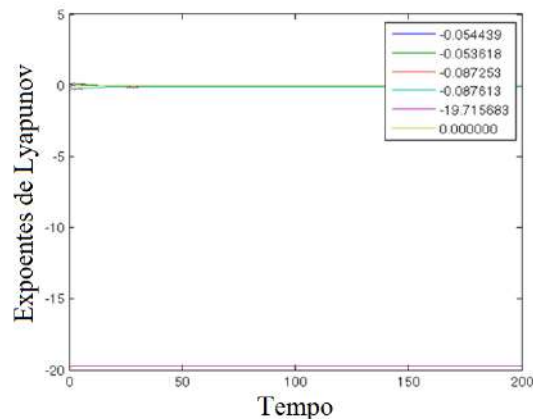


Fig. 7. Expoentes de Lyapunov para o sistema ideal.

Para o cálculo dos Expoentes de Lyapunov foi utilizado o algoritmo proposto por [6] desenvolvido a partir do sistema de equações de Lorenz. Neste caso é necessário construir a matriz Jacobiana de ordem  $6 \times 6$  do sistema linear e ideal (10), a partir das derivadas parciais em relação de cada variável das funções do lado direito do sistema de equações (10):

$$\begin{aligned}
 y'_1 &= y_2 = g_1 \\
 y'_2 &= -\mu y_2 - y_1 + \eta_1 \sin y_6 + \delta(y_3 - y_1) - \lambda y_5 = g_2 \\
 y'_3 &= y_4 = g_3 \\
 y'_4 &= -\alpha \delta(y_3 - y_1) + \alpha \lambda y_5 = g_4 \\
 y'_5 &= -\frac{1}{\rho} y_5 - 2(y_4 - y_2) = g_5 \\
 y'_6 &= \Omega = g_6
 \end{aligned} \tag{11}$$

Assim,

$$J_{(SI)} = \begin{bmatrix} g_{1,y_1} & g_{1,y_2} & g_{1,y_3} & g_{1,y_4} & g_{1,y_5} & g_{1,y_6} \\ g_{2,y_1} & g_{2,y_2} & g_{2,y_3} & g_{2,y_4} & g_{2,y_5} & g_{2,y_6} \\ g_{3,y_1} & g_{3,y_2} & g_{3,y_3} & g_{3,y_4} & g_{3,y_5} & g_{3,y_6} \\ g_{4,y_1} & g_{4,y_2} & g_{4,y_3} & g_{4,y_4} & g_{4,y_5} & g_{4,y_6} \\ g_{5,y_1} & g_{5,y_2} & g_{5,y_3} & g_{5,y_4} & g_{5,y_5} & g_{5,y_6} \\ g_{6,y_1} & g_{6,y_2} & g_{6,y_3} & g_{6,y_4} & g_{6,y_5} & g_{6,y_6} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\text{Onde } g_{j,y_i} = \frac{\partial g_j}{\partial y_i}, \quad i, j = 1 \dots 6.$$

Logo, usando a Eq. (11), a Matriz Jacobiana do sistema (10) é dada por:

$$J_{(SI)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 - \delta & -\mu & \delta & 0 & -\lambda & \eta_1 \cos y_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha \delta & 0 & -\alpha \delta & 0 & \alpha \lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

### B. Análise da Influência dos Parâmetros adimensionais no Sistema Ideal com Absorvedor Dinâmico Viscoelástico

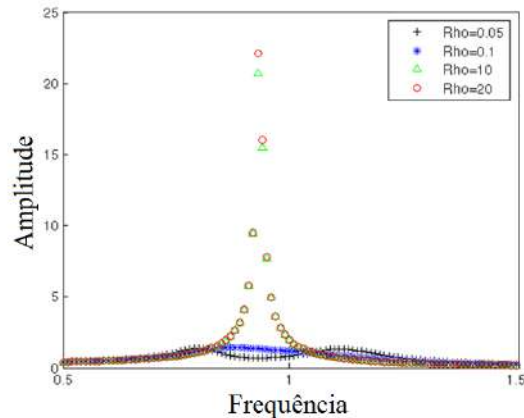


Fig. 8. Influência do parâmetro  $\rho$  na amplitude de vibração do sistema ideal.

A Fig. 8 mostra a influência do parâmetro adimensional  $\rho$ , que representa a temperatura, sobre as respostas da estrutura linear e ideal, já que o material Viscoelástico é sensível à variação de temperatura. Foram considerados quatro valores para o parâmetro  $\rho$  enquanto os outros parâmetros da Tabela 1 foram mantidos fixos. Observa-se que em comparação com o valor da temperatura  $\rho = 0.05$  já utilizado nas simulações anteriores, ou seja, para  $\rho \geq 10$ , o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico perde totalmente sua efetividade sobre o sistema.

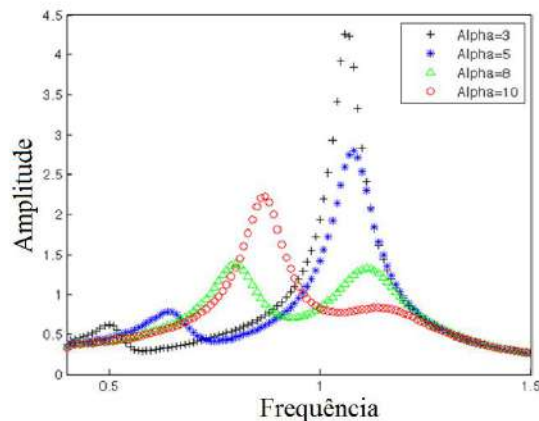


Fig. 9. Influência do parâmetro  $\alpha$  sobre a estrutura linear e ideal.

A Fig. 9 mostra a influência do parâmetro  $\alpha$ , que denota a relação das massas (a massa da estrutura ou massa principal  $m_1$  sobre a massa do Absorvedor Dinâmico Viscoelástico  $m_2$ ) sobre o sistema ideal. Para a análise do comportamento do sistema desta influência foram construídas as curvas das amplitudes de vibração da estrutura versus a frequência para quatro valores de  $\alpha$ , mantendo os outros parâmetros fixos mostrados na Tabela 1.

Note que, as respostas mostradas na linha verde para  $\alpha = 8$ , o absorvedor tem sua máxima eficiência, mostrando que o valor mostrado na tabela 1, é o valor testado, mais adequado, para este sistema.

### C. Comportamento Dinâmico do Sistema Linear e Não ideal

Nesta seção utilizam-se as curvas de ressonância, retrato de fase, serie no domínio do tempo, FFT e expoentes de Lyapunov para análise do sistema não ideal. Portanto, usa-se o sistema completo de equações diferenciais (7) que representam o sistema não ideal apresentado na Figura 1.

Agora, além de analisar a estrutura, também foi analisada a resposta da fonte de excitação, ou seja, do motor de corrente contínua e de potência limitada. Vamos considerar o parâmetro adimensional  $a$  que denota a tensão aplicada ao motor, como sendo o parâmetro de controle do sistema.

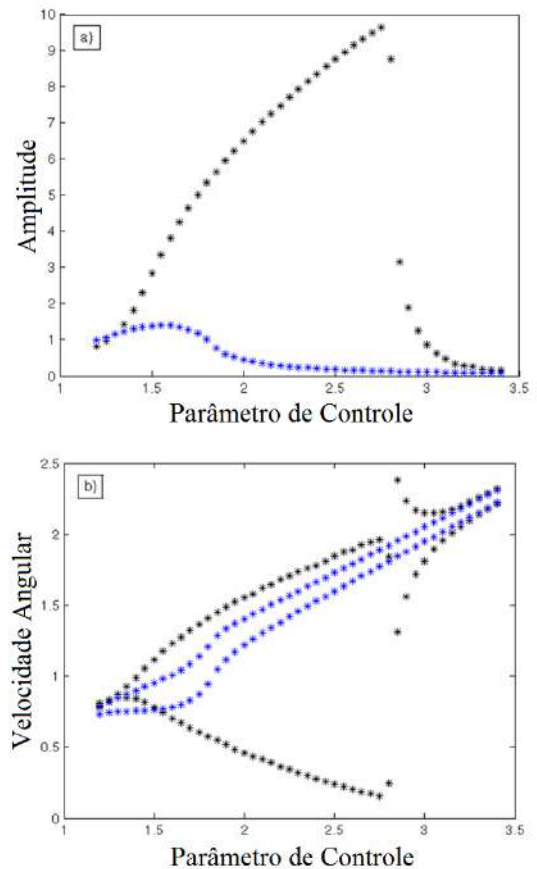


Fig. 10. Respostas com absorvedor viscoelástico ativo, em azul, e sem o absorvedor viscoelástico, em preto para: a) Estrutura linear, b) Motor não ideal.

Na Fig. 10 mostra o desenvolvimento do sistema na passagem de ressonância ( $\varphi' \approx 1$ ) através das amplitudes de oscilação da estrutura e da velocidade angular do motor versus o parâmetro de controle na faixa de  $1.2 \leq a \leq 3.4$  com um acréscimo de  $\Delta a = 0.05$  ao longo do intervalo de tempo adimensional  $0 \leq \tau \leq 1000$  no movimento regime permanente.

No caso sem absorvedor, A Fig. 10(a) mostra o desenvolvimento de movimento da estrutura com grandes amplitudes de oscilação e com fenômeno de salto (“jump”) enquanto a velocidade angular apresenta grandes amplitudes de

oscilação devido a influência de oscilação da estrutura e sendo capturada na região de ressonância (na faixa de tensão  $1.4 \leq a \leq 2.7$ ) até conseguir sair dessa região de ressonância através de um salto, ver Fig. 10(b). Depois desse salto acontecem movimentos de maneira estável tanto para estrutura como para o motor na faixa  $2.7 \leq a \leq 3.4$  (fenômeno de Sommerfeld). No caso com absorvedor, a redução das amplitudes da estrutura foi predominante enquanto a velocidade angular do motor consegue passar rapidamente sem ser capturada na região de ressonância, além disso, o fenômeno de salto foi eliminado para ambos, como pode ser verificado nas Figs. 10 (a) e (b), respectivamente.

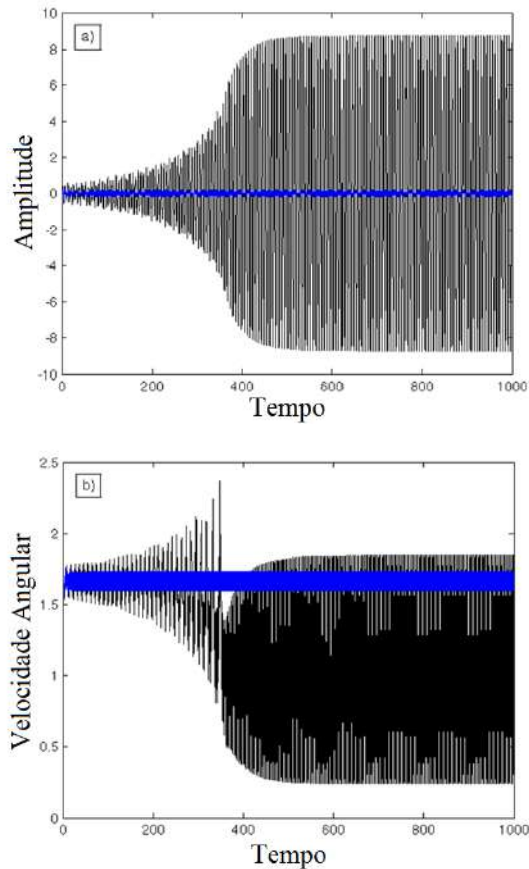


Fig. 11. Resposta no domínio do tempo com o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico, em azul, e sem o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico, em preto para: a) Estrutura linear, b) Motor não ideal.

A Fig. 11 mostra a evolução no domínio do tempo para a estrutura linear (Fig. 11a), e para a fonte de excitação não ideal (Fig. 11b), com o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico ativo (em azul), e sem a ação do mesmo (em preto), considerando um valor de  $a = 2.5$  para o parâmetro de controle (tensão aplicada à fonte não ideal).

A Fig. 11 mostra a eficiência do Absorvedor Dinâmico Viscoelástico na redução da captura de ressonância da fonte de energia não ideal e da amplitude de oscilação da estrutura, bem como a completa eliminação do Efeito de Sommerfeld (salto) (Fig. 11, em azul). A Fig. 11b, em preto, mostra que

inicialmente o motor vibra fora da frequência natural da estrutura, e posteriormente passa a vibrar com uma frequência entorno da frequência natural, tendo assim sua velocidade angular capturada na região de ressonância, apresentando assim elevados valores na sua amplitude de vibração devido à influência de oscilação da estrutura. Quando ativa-se o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico, a fonte não ideal, não mais apresenta o fenômeno de salto, bem como o Efeito Sommerfeld foi completamente eliminado, assim a velocidade angular não mais é capturada pela região de ressonância, mantendo-se assim vibrando fora da frequência natural (Fig. 11b, em azul). Também verificou-se que sem a ação do Absorvedor Dinâmico Viscoelástico a estrutura inicialmente vibra com pequenas amplitudes de oscilações antes da região de ressonância (Fig. 11a, em preto), depois, o motor tem sua velocidade angular capturada pela região de ressonância, a estrutura experimenta um crescimento exponencial de sua amplitude de vibração. Este comportamento não é mais verificado ao ativar o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico (Fig. 11 a, em azul).

A seguir, a descrição de desenvolvimento periódico do sistema não ideal quando foi aplicado o absorvedor dinâmico viscoelástico através do retrato de fase, série temporal, FFT e expoentes de Lyapunov.

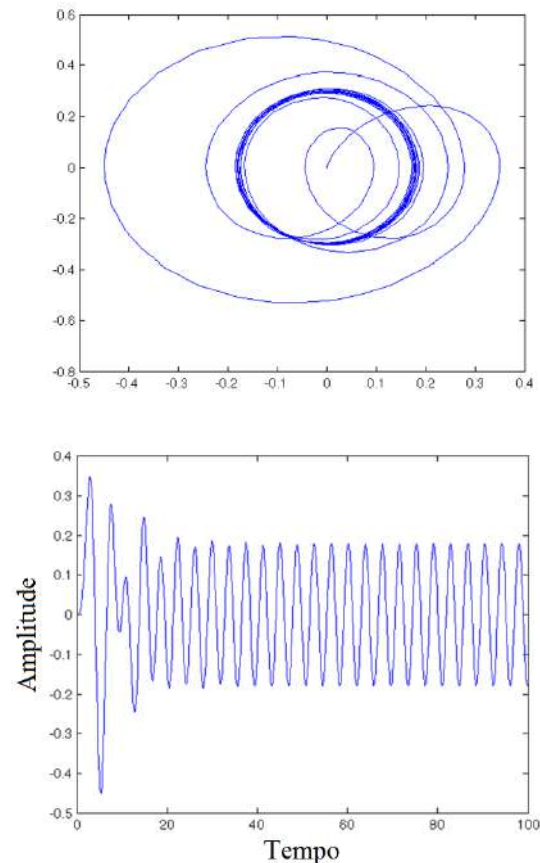


Fig. 12. Retrato de fase e resposta no domínio do tempo do sistema não ideal, com o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico ativo, para  $a = 2.5$ .

A Fig. 12 mostra o retrato de fase e domínio do tempo da estrutura linear e não ideal com o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico ativo, considerando o parâmetro de controle com um valor de  $a = 2.5$ . No início do movimento, o plano de fase apresenta inicialmente uma leve variação, ficando claro o posterior comportamento completamente cíclico, o que caracteriza uma resposta periódica do sistema não ideal. O comportamento da resposta dinâmica do sistema considerando o domínio do tempo, facilita a compreensão do que foi exposto anteriormente, ou seja, que no início do movimento (até  $\tau \approx 20$ ), o sistema apresenta um comportamento transiente, logo, no movimento de regime permanente (estado estacionário) apresenta evidentemente uma resposta completamente periódica com amplitude próxima de 0.2 no decorrer do tempo.

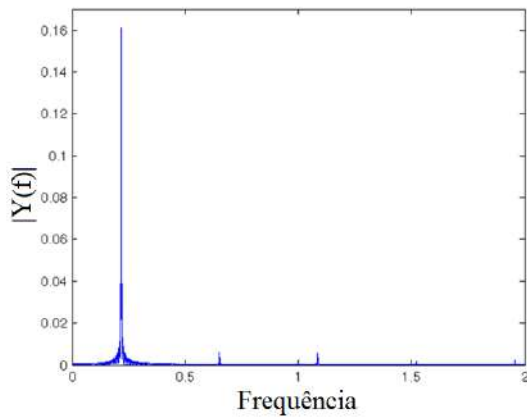


Figura 13. FFT do sistema não ideal com o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico Ativo, para  $a = 2.5$ .

A Fig. 13 apresenta o FFT para o sistema linear e não ideal com o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico ativo. Nesta figura pode ser notado que entre o intervalo de frequências de  $0 \leq \omega \leq 0.5$ , o sistema apresenta um elevado pico de oscilação, mas logo após este intervalo o sistema não ideal passa a apresentar um espectro de frequências com picos simples, e portanto, pode-se afirmar que seu comportamento é periódico. Diferentemente do que foi feito anteriormente para o sistema ideal, quando plotamos FFTs para diferentes valores de  $\omega$  (Fig. 6), para o sistema não ideal plotamos o espectro de frequências (FFT), considerando um valor de  $a = 2.5$ , para a tensão aplicada à fonte de energia (parâmetro de controle), para os demais parâmetros adimensionais que representam o sistema consideramos os valores apresentados na tabela 2.

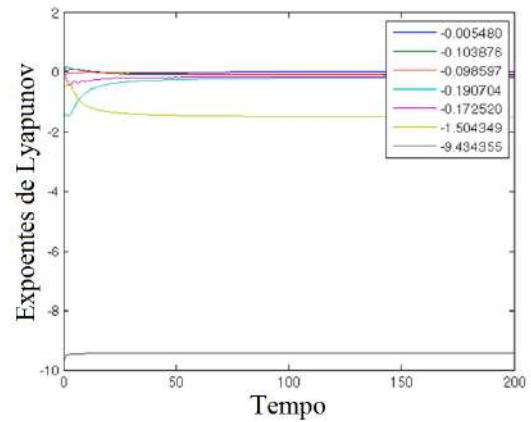


Figura 14. Expoentes de Lyapunov para o sistema não ideal.

Diferente do que foi apresentado anteriormente para o sistema ideal, onde se obteve cinco expoentes, agora tem-se sete valores de expoentes para o sistema não ideal, pois agora trabalhou-se com o sistema de sete equações diferenciais de primeira ordem, apresentado anteriormente na seção 6.1. E novamente acompanhando os valores mostrados na legenda da Fig. 14, pode-se confirmar que todos os valores dos Expoentes de Lyapunov são negativos e portanto, o sistema não ideal, também apresenta um comportamento periódico, bem como o sistema ideal que foi apresentado anteriormente.

Isto se deve ao fato de que a equação que representa a estrutura do sistema não apresenta, por exemplo, nenhum termo cúbico o que caracteriza a equação diferencial que representa o movimento da estrutura, como uma equação linear, caso esta equação apresentasse um termo cúbico e outro negativo, a equação da estrutura seria caracterizada como uma equação diferencial não linear, e assim estaria mais suscetível a apresentar um comportamento caótico em seu movimento.

Para obter os Expoentes de Lyapunov, utilizou-se um algoritmo desenvolvido por [6] a partir das equações de Lorenz, que necessita da implementação de uma Matriz Jacobiana, a partir das equações que regem o movimento do sistema linear e não ideal. Para tanto utilizou-se as equações apresentadas anteriormente na seção B deste trabalho, e assim apresenta-se a Matriz Jacobiana  $7 \times 7$  do sistema:

$$J_{(SNI)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 - \delta & -\mu & \eta_1 \cos y_3 & 0 & \delta & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_2 \cos y_3 & 0 & -\eta_2 y_1 \sin y_3 - \eta_3 2 \cos(2y_3) & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha \delta & 0 & 0 & 0 & -\alpha \delta & 0 & \alpha \lambda \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -\theta \end{bmatrix} \quad (14)$$



### D. Influência dos Parâmetros no Sistema Não Ideal com Absorvedor Dinâmico Viscoelástico

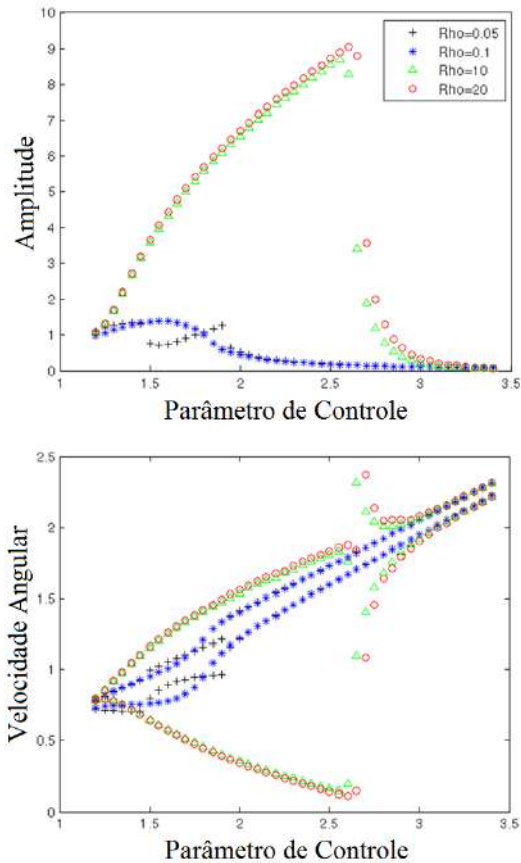


Fig. 15. Influência do parâmetro  $\rho$  na amplitude de vibração do sistema não ideal, com absorvedor Dinâmico Viscoelástico ativo.

A Fig. 15 mostra a influência da temperatura na amplitude de vibração do sistema linear e da fonte de excitação não ideal, para quatro diferentes valores de  $\rho$ , considerando o parâmetro de controle  $a = 2.5$ , mantendo os demais parâmetros adimensionais fixos, com os valores mostrados na tabela 2.

A Fig. 15 mostra a efetividade do Absorvedor Dinâmico Viscoelástico na redução da amplitude de vibração do sistema, e do efeito de Sommerfeld, para a escolha feita para o valor do parâmetro  $\rho$  mostrado na tabela 2, que é de  $\rho = 0.1$ . Observe também que, já para  $\rho \geq 10$ , o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico perde totalmente sua efetividade de funcionamento sobre o sistema não ideal.

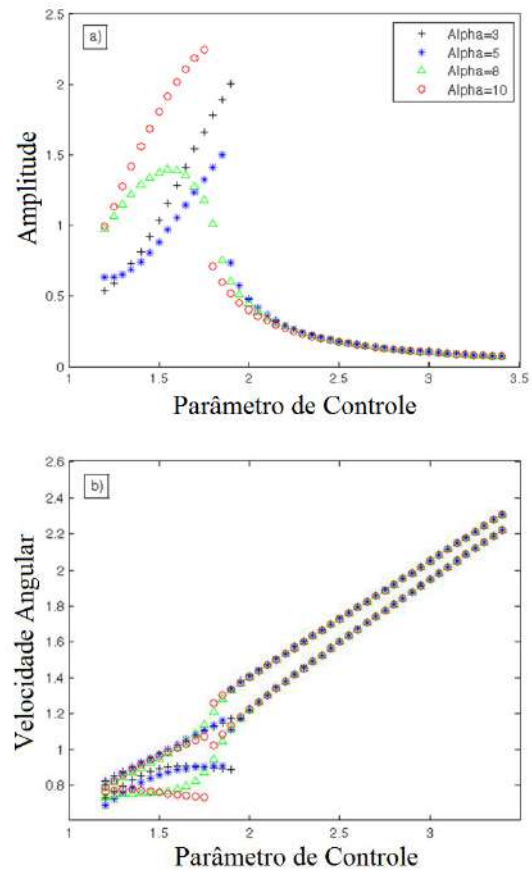


Fig. 16. Influência do parâmetro  $\alpha$ , com o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico ativo sobre: a) a estrutura e b) o motor não ideal.

A Fig. 16 mostra a influência do parâmetro  $\alpha$ , que representa a relação das massas entre a estrutura principal e o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico, sobre o sistema não ideal, para quatro valores de  $\alpha$ , mantendo os demais parâmetros adimensionais fixos, com os valores mostrados na tabela 2.

Observa-se a partir da Fig. 16, que para os valores de  $\alpha$  simulados, ocorre uma redução na amplitude de vibração da estrutura e da velocidade angular da fonte não ideal, porém verifica-se que o sistema ainda apresenta um leve salto para valores de  $\alpha \neq 8$  (que ainda é indesejado), e portanto sendo  $\alpha = 8$  o valor em que o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico apresenta seu melhor desempenho.

## IV. CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo propor a utilização de um Absorvedor Dinâmico Viscoelástico com Memória modelado por um amortecedor dependente da temperatura e do tempo com a finalidade de reduzir as amplitudes de vibração, da captura de ressonância, bem como o efeito Sommerfeld, e ainda evitar que o sistema apresente um comportamento caótico, através de simulações numéricas, considerando dois tipos de sistemas, um sistema linear e ideal e outro linear e não ideal.

O princípio básico de funcionamento de um Absorvedor Dinâmico Viscoelástico é baseado na obtenção de sua frequência natural, de tal forma que adicionado ao sistema massa mola principal tem sua frequência sintonizada com a frequência de ressonância do sistema principal sem absorvedor, o que faz com a massa do absorvedor vibre fora de fase com a estrutura, e então aplique uma força de inércia em oposição à força de excitação [9].

O Absorvedor Dinâmico Viscoelástico apresentado é modelado como uma barra de material polímero, com características viscoelásticas, ou seja, ela em si só, representa no sistema, uma mola com rigidez linear, usual em sistemas de amortecimento, justaposta em paralelo a um amortecedor viscoso, também usual, de coeficiente de amortecimento linear. As comparações feitas entre um sistema, tanto ideal e não ideal, demonstram que o Absorvedor Viscoelástico apresenta uma maior eficiência em relação a um Absorvedor Convencional mola-amortecedor viscoso, (ou isento da ação do Absorvedor Dinâmico Viscoelástico).

As simulações numéricas efetuadas com auxílio do software MATLAB®, mostraram que Absorvedor Dinâmico Viscoelástico é eficaz em seu propósito de funcionamento. Todavia, as simulações foram efetuadas considerando um sistema físico teórico, e portanto matematicamente, o Absorvedor Dinâmico Viscoelástico atinge com êxito os objetivos esperados, mas na prática da engenharia, talvez devêssemos considerar valores diferentes para os parâmetro adimensionais, parâmetros estes que devem ainda ser estudados mais profundamente futuramente, na busca de uma otimização da performance do Absorvedor Dinâmico Viscoelástico. Podemos citar por exemplo, o parâmetro adimensional  $\alpha$ , que denota a relação entre as massas da estrutura principal e do Absorvedor, que ao atribuímos um valor para este parâmetro, matematicamente, o Absorvedor poderá atender os objetivos propostos, mas na prática esta relação de massas pode ser inviável para a engenharia. Talvez este fato seja a grande desvantagem de simulações com sistemas físicos teóricos, para engenharia mecânica. Apesar deste tipo de simulação computacional ser uma forma bastante utilizada e apresentar resultados próximos aos esperados na prática.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a todo o suporte financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico. Código do Projeto: 80030520116) pela bolsa de Iniciação de Científica.

#### REFERÊNCIAS

[1] PALACIOS FELIX, J. L., “Teoria de Sistemas Vibratórios Aporticados Não Lineares e Não Ideais,” Tese, Faculdade Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 2002.

- [2] DO VALE, A. R. M., “Controle de Vibração em Reatores Elétricos Através de Absorvedores Dinâmicos Viscoelásticos,” Dissertação, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil, 2006.
- [3] BAVASTRI, C. A., “Redução de Vibrações de Banda Larga em Estruturas Complexas por Neutralizadores Viscoelásticos,” Tese, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 1997.
- [4] FOSDICK, R.L., KETEMA, Y., “A thermoviscoelastic dynamic vibration absorber”. em *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 65, 1998. pp. 17-24.
- [5] RAO, Singiresu S., “Vibrações Mecânicas,” 4 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008, p. 305-335.
- [6] WOLF, A., SWIFT J. B., SWINNEY H. L., VASTANO, J. A. “Determining Lyapunov Exponents from a Time Series”, em *Physica D*, Vol. 16, pp. 285-317, 1985.
- [7] HOLANDA, R. V. de. Otimização dos Parâmetros Construtivos de ADV’s em Estruturas. Em 20º POSMEC – Simpósio do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, MG, 2010.
- [8] ANDRADE, V. S., “Análise Dinâmica de Uma Viga Engastada Excitada por Uma Fonte Não Ideal,” Tese, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2009.
- [9] BALTHAZAR, J.M., MOOK, D.T., WEBER, H.I., BRASIL, R.M.L.R.F., FENILI, A., BELATO, D. e FELIX, J.L.P., 2003. “An overview on non-ideal vibrations”. *Meccanica*, Vol. 38, No. 6, pp. 613-621.
- [10] FELIX, J.L.P., BALTHAZAR, J.M. e BRASIL, R.M.L.R.F., 2009. “Comments on nonlinear dynamics of non-ideal Duffing-Rayleigh oscillator: numerical and analytical approaches”. Em *Journal of sound and Vibration*, 319, pp. 1136-1149.
- [11] PICCIRILLO, V., BALTHAZAR, J. M., PONTES Jr., B. R. e FELIX, J. L. P., 2008. “On a nonlinear and chaotic non-ideal vibrating system with shape memory alloy (SMA)”. Em *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 46, 3, pp. 597-620.
- [12] PICCIRILLO, V., BALTHAZAR, J. M., PONTES Jr., B. R. e FELIX, J. L. P., 2009. “Chaos control of a nonlinear oscillator with shape memory alloy (SMA) using optimal linear control: Part I: ideal energy source”. *Nonlinear Dynamics*, vol. 55, Numbers 1-2, pp. 139-149.
- [13] PICCIRILLO, V., BALTHAZAR, J. M., PONTES Jr., B. R. e FELIX, J. L. P., 2009. “Chaos control of a nonlinear oscillator with shape memory alloy (SMA) using optimal linear control: Part II: non-ideal energy source”. *Nonlinear Dynamics*, vol. 56, number 3, pp. 243-253.
- [14] PALACIOS FELIX, J. L., BALTHAZAR, J. M., LEMOS, L. A., CÉZAR, É. S. Chaotic Suppression of Non-ideal Portal Frame (NPF) Using A Viscoelástico Dynamic Vibration Absorber (VDVA). Em *VII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, São Luis, MA, 2012.
- [15] FELIX, J. L. P., CÉZAR, É. S., WANG CHONG, BALTHAZAR, J. M. Métodos Assintóticos Para Um Sistema com Materiais Não-lineares e Inteligentes, Excitado por Motor de Potência Limitada. Em *34º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, Águas de Lindóia, SP, 2012.
- [16] PALACIOS FELIX, J. L., CÉZAR É. S. Análise Dinâmica de um Oscilador com Material Inteligente Excitado por um Motor Não-ideal. Em *20º Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais*, Joinville, SC, 2012.