

Cálculo Numérico Computacional: Aplicação na Microeletrônica

Claudinei V. de Camargo e Gustavo H. Dalposso

Resumo - A resolução de um circuito série, cujo um dos componentes é um diodo semiconductor, pode ser feita através da lei de ohm se adotarmos certas simplificações, porém se desejarmos obter a solução com uma melhor exatidão, devido à natureza não linear do diodo, necessitamos nos basear em um sistema de equações para tal. A problemática imposta à Engenharia Eletrônica consiste na resolução deste sistema de equações não lineares. Este trabalho propõe-se a resolver tal sistema utilizando-se do Método de Newton e através do Software R.

Palavras-Chaves — Cálculo Numérico, Circuitos Elétricos, Diodo, Método de Newton, Semicondutores, Sistemas Não Lineares.

I. INTRODUÇÃO

As tecnologias empregadas nos *gadgets*¹ modernos contam com a intensa presença de semicondutores, *Smartphones* e *Tablets* são exemplos de dispositivos que fazem uso destes componentes em sua construção. Por ser um componente relativamente simples, o estudo do diodo semiconductor pode ser considerado a porta de entrada para o universo dos componentes que fazem uso da tecnologia semicondutora.

Este trabalho busca solucionar um problema imposto a Engenharia Eletrônica, porém por seu caráter didático, pode ser utilizado como uma introdução para leitores não familiarizados com o assunto.

Para calcularmos a corrente elétrica de um circuito simples contendo uma bateria, um resistor e um diodo, devemos fazer certas considerações.

Em um primeiro momento supomos que a corrente e as tensões no circuito podem ser obtidas pela Lei de Ohm, porém, sabemos que por não ser um dispositivo linear, a corrente e a tensão no diodo variam por uma série de fatores, como: tensão da fonte, corrente na malha e a temperatura do ambiente. Assim, temos que nos valer das equações que regem o funcionamento do diodo bem como da lei de Ohm para determinar o comportamento do circuito.

Claudinei V. de Camargo Graduando em Engenharia Eletrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) - Campus Toledo (claudinei_verissimo@hotmail.com).
Gustavo H. Dalposso Matemático, Professor Assistente, UTFPR – Campus Toledo (gustavodalposso@utfpr.edu.br).

¹É um equipamento que tem um propósito e uma função específica, prática e útil no cotidiano. São comumente chamados de *gadgets* dispositivos eletrônicos portáteis como PDAs, celulares, smartphones, leitores de MP3, entre outros.

Nos deparamos aqui com um sistema de equações não lineares. Analiticamente é possível resolver tal sistema, porém, iremos utilizar o Software R que é um programa multiplataforma de grande uso no meio acadêmico.

Com o Software R, através das leis que regem os circuitos elétricos e do método de Newton de resolução de sistemas de equações não lineares, obteremos os valores de tensão e corrente no diodo.

O trabalho está subdividido em duas partes principais. Primeiramente é feita uma introdução de conceitos a respeito de eletricidade, software R e método de Newton de resolução de sistemas. Na sequência é apresentada a problemática do trabalho bem como sua formulação. Por fim são feitas considerações sobre o estudo.

II. MATERIAL E MÉTODOS

A análise de um circuito elétrico será realizada com o propósito de ilustrar a aplicação dos métodos numéricos para resolução de sistemas não lineares. Para obter a solução de um sistema de equações não lineares iremos utilizar o pacote `nlqslv` do software R que através do método de Newton nos fornecerá uma aproximação para a solução procurada. Para obter as equações utilizadas no problema, são necessários conhecimentos básicos de eletricidade, assim, os próximos tópicos irão se ater a explicar a respeito dos fenômenos elétricos bem como introduzir o método de Newton para resolução de sistemas não lineares. Também será feita a apresentação do Software R.

A. Circuitos Elétricos

Um circuito elétrico [1] é uma interconexão de elementos elétricos. Tais circuitos são a base das engenharias cujo foco esteja na utilização e manipulação da eletricidade.

Circuitos elétricos podem se apresentar de uma maneira simples, ou seja, com poucos elementos, ou de maneira complexa, no qual aparecem milhares de componentes muitas vezes miniaturizados. Embora um circuito complexo aparentemente pareça de difícil análise, sua compreensão ocorre do entendimento de circuitos simples, uma vez que estes o compõem.

B. Elementos de Circuitos Elétricos

Dois tipos de elementos são encontrados em um circuito elétrico: elementos ativos e elementos passivos. Um elemento

ativo é capaz de gerar energia, fornecer energia ao circuito, enquanto um elemento passivo consome a energia fornecida pelo elemento ativo. Na esfera dos elementos ativos podemos citar as fontes dependentes e independentes, já no grupo dos elementos passivos encontramos comumente resistores, capacitores, indutores e diodos.

Um resistor [1] é um elemento passivo no qual a tensão V é diretamente proporcional à corrente I que passa por ele. Um diodo bipolar ou diodo de junção [2] é um dispositivo eletrônico de dois terminais que só deixa passar corrente elétrica em um sentido. Uma fonte de tensão independente [3] é caracterizada por uma tensão determinada em seus terminais que é completamente independente da corrente que a percorre.

C. Nós, Ramos, Laços e Malhas

Na análise de circuitos certas convenções de nomenclaturas são adotadas de modo a facilitar o entendimento. Algumas estruturas se repetem sobremaneira no circuito, o que fez com que os cientistas as nomeassem. Cabe salientar que as nomeações recebidas são essenciais para a compreensão das leis básicas de análise de circuitos. Assim, segundo [3] define-se:

Nó – Ponto no qual dois ou mais elementos têm uma conexão comum;

Ramo – Caminho único contendo um elemento simples que conecta um nó a qualquer outro nó;

Laço – Conjunto de Ramos formando um único caminho fechado;

Malha – Laço que não contém qualquer outro laço dentro de si.

D. Lei de Ohm

A lei de Ohm [1] afirma que a tensão V em um resistor é diretamente proporcional à corrente I através do resistor. George Simon Ohm (1787-1854), foi um físico alemão que determinou experimentalmente, em 1826, as leis mais básicas relacionadas com tensão e corrente de um resistor. Teve seu nome dado a fórmula como homenagem por seus estudos. A Equação (1) apresenta a lei de Ohm sintetizada matematicamente, onde R é o valor de resistência, I é a corrente e V é a tensão.

$$V = IR \quad (1)$$

E. Leis de Kirchoff

Gustav Robert Kirchoff (1824-1887), físico alemão, enunciou duas leis básicas em 1847 referentes à relação entre correntes e tensões em uma rede elétrica.

A primeira lei de Kirchoff, também conhecida como lei dos nós [1], diz que a soma algébrica das correntes que entram em um nó (ou um limite fechado) é zero. A segunda lei de Kirchoff, também conhecida como lei das malhas [4], afirma que a soma algébrica das correntes presentes em uma junção (nó) de um circuito é zero.

F. Resistores

A resistência elétrica é uma oposição ao fluxo da corrente elétrica [5]. Seu valor é normalmente representado pela letra R e é dependente do comprimento l , da seção transversal S e da resistividade ρ do material. Podemos condensar estas informações em uma fórmula.

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2)$$

Por definição qualquer material é um resistor, pois a resistência à corrente elétrica é uma característica inerente a matéria. Porém, resistores no âmbito da análise de circuitos são elementos especialmente construídos para aplicação em circuitos elétricos, com finalidade de limitar a corrente num dado ramo do circuito.

Quando aplicamos uma diferença de potencial em um elemento resistivo podemos obter um gráfico característico Tensão \times Corrente, já que com a aplicação de tensão uma corrente irá circular no material. Os resistores especialmente projetados para os circuitos possuem um gráfico cuja característica é linear (Fig. 1). Por possuir tal característica, o material também recebe o nome de material ôhmico uma vez que pode ser descrito pela lei de Ohm.

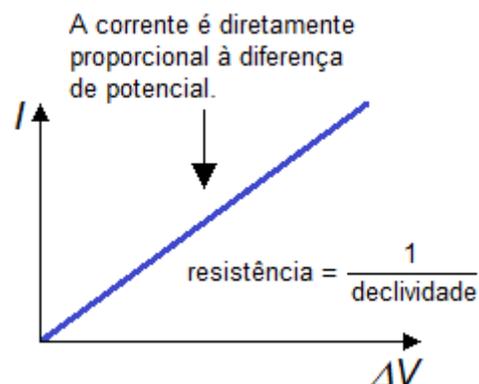


Fig. 1. Gráfico Tensão \times Corrente de um Resistor.

Os materiais cuja curva característica não é linear são nomeados materiais não-ôhmicos por não obedecerem a lei de Ohm. Um exemplo de componente não ôhmico são os diodos bipolares. Embora o valor de resistência de um resistor seja dependente da temperatura, no âmbito da lei de Ohm esse fator é negligenciado sem grandes consequências aos projetos, cabendo ao projetista determinar quando este fator deve ser levado em consideração.

Assim, pela lei de Ohm fica patente que a corrente que irá circular por um resistor é dependente exclusivamente da tensão aplicada em seus terminais, bem como do valor de resistência apresentada pelo elemento. A corrente que irá circular pelo resistor é apresentada na Equação (3).

$$I = \frac{V}{R} \quad (3)$$

Desta mesma equação se obtém a Equação (4) para a tensão no resistor, uma vez conhecidas a corrente que circula pelo

mesmo e o seu valor de resistência.

$$V = RI \quad (4)$$

G. Materiais da Engenharia

Materiais, do ponto de vista das engenharias, podem ser referidos como substâncias que através de suas propriedades químicas e físicas servem a um fim, construção de máquinas, estruturas, dispositivos e produtos [6].

De acordo com a área de enfoque, determinados tipos de materiais são vastamente utilizados em detrimento de outros. Assim, a classificação dos tipos de materiais é realizada tendo como base variados ramos de estudo e pesquisa.

Embora as classificações dos materiais variem, o escopo de ordenação é frequentemente feito levando-se em consideração: a composição química, a forma de ocorrência na natureza, o processo de manufatura a que é submetido, a estrutura cristalina ou o uso técnico e industrial do material [7].

Na Engenharia Eletrônica a classificação que tem como premissa as propriedades físico-químicas dos materiais é amplamente empregada. Para possibilitar essa forma de arranjo, utiliza-se a Teoria das Bandas de Energia.

H. Classificação da Matéria

1) Estrutura de um Átomo

É universalmente aceito que os materiais são constituídos por átomos [8].

Átomos, por sua vez, são formados por três partículas fundamentais. Essas são o nêutron, o próton e o elétron [9]. Cabe salientar que a utilização da palavra fundamentais, é justificável devido ao fato que para explanação dos fundamentos aqui empregados estas três partículas são suficientemente elucidativas.

Atualmente [10], considera-se que a matéria é constituída por seis quarks, três léptons e três neutrinos associados aos léptons.

Os elétrons e prótons são naturalmente partículas que apresentam propriedades elétricas. Por sua vez, o nêutron é uma partícula imune a campos elétricos.

Por definição, prótons são partículas de carga positiva ao passo que elétrons são partículas de carga negativa.

A ordenação das partículas no átomo é feita segundo o modelo planetário de Bohr, onde existe uma região chamada núcleo e outra denominada órbita. No núcleo são encontrados os prótons bem como os nêutrons. Orbitando o núcleo encontram-se o elétrons.

Cada elemento químico possui um átomo associado. Para classificar tais elementos utiliza-se uma propriedade inerente a cada átomo que é a sua quantidade de prótons. Em um estado considerado neutro, as quantidades de elétrons e prótons em um átomo são numericamente iguais.

Para descrever os elétrons presentes em um átomo utiliza-se o que na mecânica quântica chama-se números quânticos [11]. São necessários três números quânticos para descrever a distribuição dos elétrons na órbita do átomo. Esses números

derivam da solução matemática da equação de Schrödinger e são conhecidos como: número quântico principal, número quântico de momento angular e número quântico magnético. Um quarto número é empregado para se obter a descrição completa, o número quântico de spin.

O número quântico principal está relacionado com a distância média entre o elétron em determinado orbital e o núcleo. Assim, usualmente este número quântico é modelado como uma camada da órbita do átomo.

A medida que o número quântico principal aumenta, cresce também a energia atribuída aos elétrons presentes nesta camada.

Em um átomo com seus elétrons distribuídos, a camada mais externa à comportar estas partículas é denominada camada de valência.

2) Teoria das Bandas de Energia

Os elétrons possuem energia característica a localidade que ocupam no átomo, assim, os mais próximos do núcleo possuem energia inferior a elétrons presentes em posições mais longínquas.

A energia atribuída aos elétrons não é arbitrária, apresenta valores bem definidos [12].

A discussão até aqui ocorre no âmbito de um átomo isolado, porém, quando utilizamos materiais na engenharia esses se apresentam em forma de substâncias sólidas, líquidas ou gasosas.

Em um sólido cristalino, os átomos se apresentam em grande quantidade e próximos uns dos outros. Ocorre que os níveis de energia possíveis para um elétron são aumentados devido a interação com átomos adjacentes.

O que se observa experimentalmente, é que os níveis de energia possíveis estão agrupados em faixas, ou bandas, formadas por níveis discretos, numerosos e pouco espaçados [13].

Três bandas se destacam: a banda de valência, a banda de condução e a banda proibida também denominada de *gap*. A banda proibida não consiste exatamente em uma faixa de níveis possíveis para os elétrons ocuparem e sim em uma separação entre as bandas de condução e valência.

A separação entre a banda de valência e a banda de condução evidentemente não é mensurada como uma unidade de comprimento e sim como uma unidade de energia. A unidade correspondente a energia no SI é o joule (J), porém, no âmbito dos átomos esta torna-se uma unidade demasiadamente grande. Assim, convencionou-se a unidade de medida elétron-volt (eV), que é a energia necessária para que um elétron atravessasse um campo elétrico de intensidade de 1 volt.

$$1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J \quad (5)$$

Os valores de energia do *gap* associado aos materiais estão intimamente relacionados com a temperatura do ambiente em que a substância está exposta. Deste modo, as definições denominadas condutor, isolante e semicondutor estão referenciadas à temperatura ambiente, 300 K.

3) Condutores

O fenômeno de condução de corrente elétrica em um material condutor está relacionado com a maior ou menor quantidade de elétrons na camada de condução, bem como com a maior ou menor energia associada ao *gap*.

Os materiais condutores, assim denominados devido a boa capacidade de condução de corrente elétrica, são substâncias que possuem uma grande quantidade de elétrons livres na camada de condução. Também apresentam as camadas de valência e condução sobrepostas, de modo que o *gap* não existe. Os principais representantes desta classe são os metais.

A Figura 2 apresenta a estrutura dos metais quanto as bandas de energia.

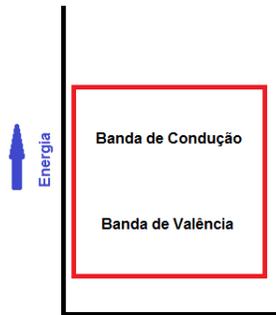


Fig. 2. Estrutura dos materiais condutores.

4) Isolantes

Convencionou-se chamar de isolante materiais cuja resistividade é muito alta. Do ponto de vista da Teoria das Bandas de Energia, são substâncias cujo *gap* é acentuado, com valores da ordem de 7 eV [9]. Rompimento de isolamento é a denominação recebida quando este tipo de material passa a conduzir corrente elétrica. Na Engenharia Eletrônica, materiais cerâmicos e poliméricos se destacam como isolantes.

A Figura 3 apresenta a estrutura dos materiais isolantes quanto as bandas de energia.

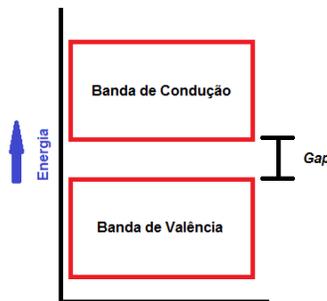


Fig. 3. Estrutura dos materiais isolantes.

I. Semicondutores

Através da definição de condutores e de isolante do ponto de vista da Teoria das Bandas de Energia, observa-se uma condição intermediária, a condição em que o *gap* está presente porém de forma atenuada. Com valores da ordem de 1 eV [9] estes materiais são conhecidos como semicondutores e são representados principalmente pelo silício e pelo germânio.

O *gap* associado ao silício é de 1,12 eV enquanto para o germânio o valor é de 0,72 eV [9], valores estes à temperatura ambiente uma vez que esta exerce influência sobre o *gap*.

A Figura 4 apresenta a estrutura dos materiais semicondutores quanto as bandas de energia.

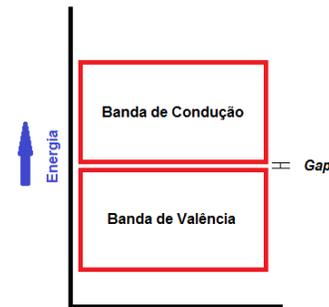


Fig. 4. Estrutura dos materiais semicondutores.

Na definição de condutores do item H, estabelece-se que a corrente elétrica é proporcionada devido à grande quantidade de elétrons livres na banda de condução. Já para os semicondutores, a ideia de condução elétrica não se limita a presença de elétrons na camada de condução, mas também pela ausência de elétrons na camada de valência.

1) Semicondutor Intrínseco

Um semicondutor intrínseco é um cristal de material semicondutor puro [14], ou seja, uma estrutura composta por apenas átomos de um mesmo elemento semicondutor.

À temperatura de 0 K o cristal de silício se comporta como um material isolante perfeito. Nesta condição temos todos os níveis de energia da camada de valência ocupados e nenhum elétron na camada de condução. A medida que a temperatura aumenta, a energia fornecida ao cristal faz com que elétrons da camada de valência passem para a banda de condução.

Quando elétrons passam da banda de valência para a banda de condução através do aquecimento do cristal, o processo é denominado geração térmica de pares elétron-lacuna.

A saída do elétron da camada de valência cria um vazio chamado lacuna [14]. Quando um elétron ocupa uma lacuna denomina-se recombinação.

Como os elétrons apresentam carga elétrica negativa, a ausência deste é vista como a presença de uma carga positiva virtual, assim a lacuna é considerada positiva.

Os elétrons e lacunas gerados se movem de forma randômica, de modo que não constituem corrente elétrica. Porém, se uma fonte externa de tensão for aplicada ao cristal, verifica-se a circulação de corrente elétrica. Os elétrons da banda de condução se movem no sentido do polo positivo da fonte, ao passo que as lacunas se movem no sentido negativo.

Compreendida a ideia da entidade “lacuna”, fica patente que na verdade não são lacunas que se movem e sim elétrons. Deste modo, a corrente total que circula pelo circuito é composta pela soma das correntes, corrente devido aos elétrons da camada de condução e corrente devido as lacunas da camada de valência.

2) Semicondutor Extrínseco

A forma de aumentar a condutividade de um semicondutor consiste no processo denominado dopagem. O processo resume-se na adição de átomos de impureza no semicondutor intrínseco. Um semicondutor dopado é chamado semicondutor extrínseco [14].

Quando dopa-se um semicondutor intrínseco, busca-se aumentar a quantidade de elétrons na camada de condução ou aumentar o número de lacunas na camada de valência.

Quando aumenta-se o número de elétrons, o cristal resultante é conhecido como semicondutor do tipo n. Em contraposição, o aumento de lacunas implica em um semicondutor do tipo p.

A obtenção dos cristais n e p, é feita a partir da inserção de átomos pentavalentes e trivalentes, respectivamente, na estrutura cristalina do semicondutor puro. Na prática, funde-se o cristal semicondutor puro e acrescenta-se arsênio, antimônio ou fósforo para obtenção do cristal n e alumínio, boro ou gálio para cristal do tipo p [14].

As quantidades de impurezas adicionadas são inerentes a cada fabricante e permitem determinar as propriedades e características dos dispositivos produzidos com os cristais.

J. Diodo Semicondutor

Quando unimos duas pastilhas de material semicondutor sendo uma do tipo n e outra do tipo p [15], o dispositivo resultante chama-se diodo semicondutor, componente que apresenta à passagem da corrente elétrica uma resistência muito baixa em um sentido e muito alta em outro. Esta característica diferenciada ao comportamento do resistor, faz com que o diodo seja considerado um material não ôhmico e consequentemente, não pode ser descrito pela lei de ohm. A Figura 5 apresenta a curva Tensão x Corrente característica ao diodo.



Fig. 5. Gráfico Tensão x Corrente de um diodo.

Diodos são componentes eletrônicos cuja finalidade nos circuitos é efetuar o chaveamento de uma dada corrente elétrica. O processo de funcionamento pode ser sintetizado a partir da ideia de que o diodo [2] deixa a corrente elétrica circular em um sentido, mas não no outro. Diodos de Junção apresentam dois terminais, os quais recebem nomes próprios.

A Figura 6 apresenta o símbolo representativo do diodo.

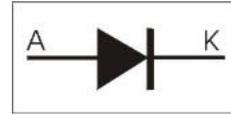


Fig. 6. Símbolo Representativo do diodo Semicondutor.

O terminal marcado com a letra A recebe o nome de ânodo, já o outro recebe o nome de cátodo. Como o diodo de junção é formado por pastilhas semicondutoras, temos que o terminal K corresponde a pastilha de material n e o terminal A corresponde a pastilha do tipo p. Para que o diodo entre em funcionamento em um circuito é necessário que esse seja polarizado. Por polarização, entende-se aplicar uma diferença de potencial entre o ânodo e o cátodo.

A polarização pode ocorrer de duas maneiras, aplicando-se um potencial maior no cátodo e um potencial menor no ânodo, e o caso oposto ânodo com potencial maior que o cátodo.

Quando o potencial mais elevado é aplicado no ânodo e consequentemente o de menor potencial no cátodo, dizemos que o diodo está diretamente polarizado. O caso contrário, potencial maior no cátodo, recebe o nome de polarização reversa. Sob polarização direta a corrente que circula pela junção é uma função exponencial da tensão aplicada [7] conforme é apresentado na Equação (6).

$$I_d = I_s \left[e^{\frac{V_f}{n \cdot V_T}} - 1 \right] \quad (6)$$

Em que:

I_d : a corrente que circula pelo diodo.

I_s : corrente de saturação reversa.

V_T : tensão térmica.

V_f : tensão aplicada no diodo.

n : coeficiente de emissão.

Na junção entre as pastilhas n e p existe um potencial elétrico devido a recombinação do excesso de elétrons do cristal n com o excesso de lacunas do cristal p. Essa tensão não é utilizável, visto que o diodo é um componente passivo. Na realidade, essa tensão constitui uma barreira de potencial que será intensificada quando o diodo for polarizado reversamente e eliminada quando o diodo for polarizado diretamente.

Para que o diodo entre em condução, além de diretamente polarizado, é necessário que a tensão aplicada no componente seja superior ao potencial da barreira. Assim, a tensão aplicada possui a função de eliminar a barreira de potencial, permitindo que o diodo conduza corrente.

Quando o diodo é polarizado reversamente o potencial da barreira é intensificado e consequentemente impede que a corrente elétrica circule pelo componente. Como nos materiais isolantes, existe um limiar de tensão a que o diodo pode ser submetido sem que ocorra o rompimento da isolamento. Caso isso ocorra o diodo será danificado.

Da Equação (6) é possível detalhar I_S , conforme apresentado na Equação (7). Esta corrente tem sua origem das características inerentes ao material semiconductor resultante da união de uma pastilha p com uma n [15].

$$I_S = Aqn_i^2 \left(\frac{D_n}{N_A L_n} + \frac{D_p}{N_D L_p} \right) \quad (7)$$

Nesta Equação, A é a seção transversal do dispositivo, L_n e L_p são os comprimentos de difusão de elétrons e lacunas respectivamente, N_A é a densidade de átomos aceitadores, N_D é a densidade de dopantes, incluídos no processo de dopagem, n_i representa a densidade de material semiconductor intrínseco e é independente do nível de dopagem e q é a unidade de carga elétrica fundamental $1,6 \times 10^{-19} C$. D_n e D_p são fatores de proporcionalidade chamados de constantes de difusão.

Em (6) a tensão térmica V_T é uma função da temperatura T (em Kelvin), da constante de Boltzman k e da unidade de carga elétrica fundamental q , conforme apresentado na Equação (8).

$$V_T = \frac{kT}{q} \quad (8)$$

Os valores de I_S e do coeficiente n são determinados no momento da fabricação do componente, logo, são fatores que não podem ser controlados pelo desenvolvedor de projetos. Ocorre que os fabricantes fornecem inúmeros diodos ao mercado com características distintas, entre elas a corrente I_S e o coeficiente n , assim quando um componente é adquirido deve-se consultar o *DataSheet*² do diodo fornecido pelo fabricante.

Da mesma forma que foi definida a tensão sobre o resistor manipulando-se a equação da corrente do componente, é possível obter uma equação para a tensão sobre o diodo (Equação 9). Conhecendo-se a corrente que circula por este, bem como as demais constantes da equação o valor de tensão pode ser determinado.

$$V_d = n \cdot \ln \left(\frac{I_d}{I_S} + 1 \right) V_T \quad (9)$$

K. Método de Newton

Considere a função não linear $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)^T$, o objetivo é encontrar a solução para o sistema:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

O vetor das derivadas parciais da função $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é denominado vetor gradiente de $f_i(x)$ e é denotado por $\nabla f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$:

$$\nabla f_i(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right) \quad (11)$$

Se $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$, a matriz das derivadas parciais de $F(x) = (f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_n(x))^T$ é chamada matriz Jacobiana, sendo denotada por $J(x)$:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \nabla f_2(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (12)$$

No caso de $x \in \mathbb{R}$, o método de Newton consiste em se tomar um modelo local linear da função $f(x)$ em torno da aproximação inicial x_k , e este modelo é a reta tangente à função em x_k , ou seja, $L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$ [17]. Ampliando a motivação de se obter um modelo local linear para o caso de um sistema de equações não lineares, teremos: conhecida a aproximação $x_k \in D$, para qualquer $x \in D$, existe $c_i \in D$, tal que:

$$f_i(x) = f_i(x_k) + \nabla f_i(c_i)^T (x - x_k) \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

Aproximando $\nabla f_i(c_i)$ por $\nabla f_i(x_k)$, $i = 1, \dots, n$ tem-se um modelo local linear para $f_i(x)$ em torno de x_k :

$$f_i(x) \approx f_i(x_k) + \nabla f_i(x_k)^T (x - x_k) \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

E, portanto, o modelo local linear para $F(x)$ em torno de x_k fica:

$$F(x) \approx L_k(x) = F(x_k) + J(x_k)(x - x_k) \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

Assim, $L_k(x) = 0 \Leftrightarrow J(x_k)(x - x_k) = -F(x_k)$. Denotando $x - x_k = s_k$, tem-se $x_{k+1} = x_k + s_k$ em que, s_k é a solução do sistema linear $J(x_k)s = -F(x_k)$. A sequência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton a partir de uma aproximação x_0 , suficientemente próxima da solução do sistema, converge para esta solução e a convergência é quadrática [18].

L. Software Livre R

O software R [19] é um importante instrumento computacional para a análise e manipulação de dados. Trata-se de um software de ampla utilização nas ciências exatas e por ser um software livre, ou seja, de código aberto, recebe contribuições da comunidade científica em geral. A linguagem de programação R foi criada originalmente por Ross Ihaka e por Robert Gentleman no departamento de Estatística da universidade de Auckland, Nova Zelândia, e foi desenvolvida por um esforço colaborativo de pessoas em vários locais do mundo. O nome R deriva em parte das iniciais dos criadores e também de um jogo figurado com a linguagem S.

R é uma linguagem e ambiente similar ao S e pode ser considerado uma implementação distinta do S. Embora com importantes diferenças, muitos códigos escritos para o S rodam inalterados no R. A implementação comercial de S é S-PLUS. O código fonte do R está disponível sob a licença GNU

²Folha de dados onde constam as informações características do componente.

GPL e as versões binárias pré-compiladas são fornecidas para Windows, Macintosh, e muitos sistemas operacionais Unix/Linux. O software R é também altamente expansível com o uso dos pacotes, que são bibliotecas para funções específicas ou áreas de estudo específicas. Um conjunto de pacotes é incluído com a instalação de R, com muitos outros disponíveis na rede de distribuição do R. O método de Newton para sistemas não lineares está implementado no pacote `nleqslv` [20].

III. ANÁLISE E DISCUSSÕES

A finalidade deste trabalho consiste na determinação da corrente que irá circular em um circuito série, composto por um diodo, um resistor e uma fonte CC. Para isso, os conhecimentos apresentados ao longo do texto são cruciais.

A Figura 7 apresenta um circuito série composto por uma fonte de tensão CC, um resistor e um diodo semiconductor.

O processo a seguir tem como objetivo determinar a corrente e a tensão no diodo 1N4001.

O diodo 1N4001 apresenta em seu DataSheet $I_S = 31,9824 \text{ nA}$ e $n = 2$. Para analisar o circuito, foi adotada a temperatura ambiente como padrão, assim, $V_T = 0,025875 \text{ V}$. A determinação correta de V_T irá implicar em uma melhor aproximação do resultado correto.

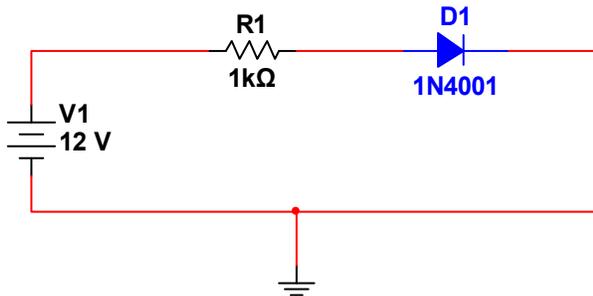


Fig. 7. Circuito Não Linear.

O circuito da Figura 7 é um circuito série, pela 2ª Lei de Kirchoff podemos concluir que a soma algébrica das quedas de tensões na malha é igual a zero.

Pelas definições de elementos passivos e ativos podemos extrair do circuito a informação de que a soma da tensão sobre D1 e sobre R1 será igual a tensão da fonte V1.

Do circuito série sabemos também, que a corrente que circula pelo diodo é a mesma que circula pelo resistor. Assim, pela lei de Ohm, podemos concluir que a corrente no circuito será dada pelo quociente da tensão sobre o resistor pelo valor de resistência do resistor. Como trata-se de um circuito série, a tensão sobre o resistor é obtida pela diferença entre a tensão da fonte e a tensão sobre o diodo. Assim temos:

$$I_{R1} = I_{D1} = \frac{V1 - V_{D1}}{R1} \quad (16)$$

$$I_{D1} = \frac{12 - V_{D1}}{1000} \quad (17)$$

Do estudo dos Diodos obtém-se que a corrente que circula no diodo é dada por:

$$I_d = I_s \left[e^{\frac{V_f}{nV_T}} - 1 \right] \quad (18)$$

$$I_{D1} = 31,9824 \times 10^{-9} \left[e^{\frac{V_{D1}}{2 \cdot 0,025875} - 1} \right] \quad (19)$$

O usual a ser feito na análise de circuitos como o da Figura 7 é adotar um valor aproximado de $V_D = 0,7 \text{ V}$ para diodos de silício e $V_D = 0,3 \text{ V}$ para diodos de germânio. Esta convenção é adotada pois verifica-se que estes são os valores a que tendem as tensões em cada tipo de diodo quando polarizados diretamente em um circuito [16].

Uma vez definidas as equações que regem o circuito, o interesse é resolver o seguinte Sistema de Equações Não Lineares:

$$\begin{cases} I_{D1} = 31,9824 \times 10^{-9} \left[e^{\frac{V_{D1}}{2 \cdot 0,025875} - 1} \right] \\ I_{D1} = \frac{12 - V_{D1}}{1000} \end{cases} \quad (20)$$

Para solucionar o sistema de equações acima pelo método de Newton iremos necessitar de uma estimativa inicial dos valores de I_{D1} e V_{D1} . A forma mais simples de se estimar estes valores é determinar uma aproximação para o ponto de interseção dos gráficos das equações do sistema, pois este ponto é a solução. Utilizando o software R podemos obter o gráfico citado acima, apresentado na Figura 8, através da execução do seguinte código.

```
# Define-se a Primeira Função.
f<-function(x){0.0000000319824*exp(x/(2*(1.38e-23*(300)/1.60e-19)))-0.0000000319824}
# Define-se a Segunda Função.
g<-function(x){(12/1000)-(x/1000)}
# Cria-se Uma Janela Gráfica.
plot.new()
# Plota-se as Funções.
plot(g,xlim=c(0,1),ylim=c(0,0.02),xlab="Vd1",ylab="I
d1",col="blue")
plot(f,add=T,xlim=c(0,1),col="red")
```

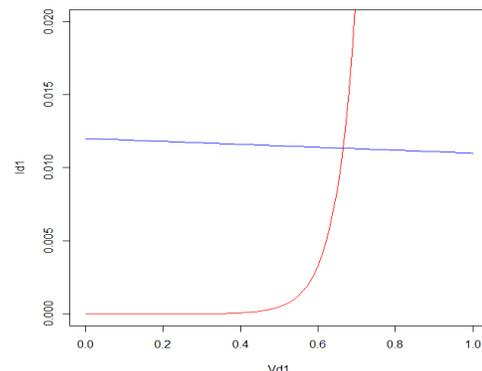


Fig. 8. Gráfico das Equações do Sistema.

Na Figura 8 o gráfico azul correspondente a Equação (17) e o gráfico vermelho correspondente a Equação (19). A interseção das curvas corresponde a solução do sistema não linear. A partir do gráfico, escolhemos $V_{D1} = 0,65 V$ e $I_{D1} = 0,012 A$ como aproximações iniciais pois estes valores parecem próximos da solução.

Com estes dados, podemos escrever o seguinte código para obter uma aproximação para a solução do sistema não linear.

```
# Carrega-se o Pacote nleqslv.
require(nleqslv)
# Define-se o Sistema Não Linear.
sistema <- function(x)
{
  y <- numeric(2)
  y[1] <- (x[1])-(31.9824e-9)*(exp((x[2])/(2*((1.38e-23*(300)/1.60e-19))))-1)
  y[2] <- ((x[1])*1000)+(x[2])-(12)
  y
}
#Define-se uma aproximação inicial com base no
gráfico da Figura 8.
xstart <- c(0.012, 0.65)
#Substitui-se a aproximação padrão do sistema.
fstart <- sistema(xstart)
fstart
# Resolução pelo Método de Newton, considerando-se
um erro de 0,00001.
nleqslv(xstart,sistema,method=c("Newton"),control=list(ftol=0.00001))
```

Executando-se os comandos acima obtém-se como resultado $I_{D1} = 11,33869 \text{ mADC}$ e $V_{D1} = 661,307 \text{ mVDC}$. Assim, obtivemos a tensão e corrente sobre o diodo 1N4001 através da solução do sistema de equações não lineares.

Para julgarmos se o resultado obtido encontra-se em um patamar aceitável, poderíamos construir o circuito. Porém, fizemos a utilização de um software de simulação bastante difundido no meio acadêmico. O programa em questão é o NI Multisim. Este software é proprietário e possui versões tanto para estudantes quanto para desenvolvedores de sistemas.

Ao simular o circuito fizemos uso dos multímetros digitais virtuais do software para obter a corrente e a tensão sobre o diodo. Cabe salientar que o diodo utilizado no software é o mesmo cujos parâmetros foram utilizados na modelagem do problema (1N4001).

A Figura 9 apresenta os multímetros XMM1 e XMM2 que exibem a tensão e a corrente inerentes ao diodo.



Fig. 9. Resultados Encontrados para o Circuito em um Software de Simulação.

Para averiguar o grau de aproximação, a exatidão, dos valores obtidos com o modelo, necessitamos de valores de referência, valores considerados corretos. Adotando-se os resultados do simulador como verdadeiros, podemos estimar o erro inerente aos resultados do modelo.

O erro absoluto de uma estimativa [21] é definido pela Equação (21).

$$Ea = |\text{valor verdadeiro} - \text{aproximação}| \quad (21)$$

Já os erros relativo e relativo percentual [21] são definidos pelas Equações (22) e (23).

$$Er = \frac{Ea}{|\text{valor verdadeiro}|} \quad (22)$$

$$Er\% = Er \times 100 \quad (23)$$

As Equações (24) e (25) apresentam os erros relativos percentuais para a corrente e tensão no diodo.

$$Er\%(Corrente \text{ no Diodo}) = 0,002\% \quad (24)$$

$$Er\%(Tensão \text{ no Diodo}) = 0,029\% \quad (25)$$

Os erros obtidos representam o grau de concordância entre os valores do modelo e os valores do simulador.

IV. CONCLUSÃO

Podemos observar que os valores de tensão e corrente no diodo gerados pelo software R estão condizentes com os valores obtidos quando o circuito é simulado.

Através dos erros relativos percentuais evidencia-se a exatidão dos resultados do modelo. Uma vez que os componentes eletrônicos dos circuitos possuem tolerâncias muitas vezes acima de 1%, 0,029% e 0,002% são valores aceitáveis de discrepância.

A escolha do software R foi feita devido à grande utilização deste nos meios acadêmicos, bem como por se tratar de um software livre. Programas como o Matlab e o LabView, de licença proprietária, também poderiam ter sido utilizados na modelagem. Outra alternativa é o software Octave, ferramenta para cálculos numéricos computacionais, sendo a melhor opção gratuita em comparação ao Matlab.

Quanto ao simulador utilizado, Multisim, fizemos essa escolha pois para área de simuladores de circuitos ainda existe uma carência de softwares livres. Porém, programas como o Quite Universal Circuit Simulator, de licença gratuita, vem sendo aperfeiçoados pela comunidade de programadores.

Fica patente que a utilização de metodologias do cálculo numérico em software livre é de extrema utilidade ao engenheiro, minimizando custos, tempo e fornecendo confiabilidade aos dimensionamentos.

REFERÊNCIAS

- [1] C. K. Alexander e M. N. O. Sadiku. *Fundamentos de Circuitos Elétricos*. Porto Alegre: McGraw Hill Brasil, 2008.
- [2] S. M. Rezende. *Materiais e Dispositivos Eletrônicos*. São Paulo: Livraria da Física, 2004.
- [3] W. H. Hayt, J. E. Kemmerly, S. M. Durbin. *Análise de Circuitos de Engenharia*. Porto Alegre: McGraw Hill Brasil, 2010.
- [4] M. Tooley. *Circuitos Eletrônicos: Fundamentos e Aplicações*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [5] W. Bauer, G. D. Westfall, H. Dias. *Física para Universitários: Eletricidade e Magnetismo*. São Paulo: AMGH Editora Ltda., 2012.
- [6] A. F. Padilha. *Materiais de Engenharia*. 2ª ed. São Paulo: Hemus, 2007.
- [7] S. L. Kakani e A. Kakani. *Material Science*. New Delhi: New Age International Pvt Ltd Publishers, 2004.
- [8] A. Guinier. *A estrutura da matéria: Do céu azul ao material plástico*. São Paulo: Edusp – Editora da Universidade de São paulo, 1996.
- [9] A. P. Godse, U. A. Bakshi. *Semiconductor Devices and Circuits*. 6ª ed. Pune: Technical Publications Pune, 2008.
- [10] G. C. Marques. *Física: tendências e perspectivas*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.
- [11] R. Chang. *Química Geral: Conceitos Essenciais*. 4ª ed. Porto Alegre: McGraw Hill Brasil, 2007.
- [12] R. A. Hinrichs, M. Kleinbach. *Energia e Meio Ambiente*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [13] W. H. Hayt, J. A. Buck. *Eletromagnetismo*. 7ª ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.
- [14] A. Malvino e D. J. Bates. *Eletrônica*. 7ª ed. São Paulo: Mcgraw Hill Brasil, 2007.
- [15] J. Bird, L. C. Queiroz, J. L. Barroso. *Circuitos Elétricos: Teoria e Tecnologia*. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda., 2009.
- [16] B. Razavi. *Fundamentos de Microeletrônica*. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [17] M. A. G. Ruggiero e V. L. R. Cálculo Numérico: *Aspectos Teóricos e Computacionais*. São Paulo - SP: Pearson Makron Books, 1996.
- [18] S. Arenales e A. Darezzo. *Cálculo Numérico: Aprendizagem com apoio de software*. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- [19] R Core Team. R: *A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2012.
- [20] B. Hasselman. (2013). nleqslv: Solve systems of non linear equations.(version2.0). Disponível em: <http://CRAN.R-project.org/package=nleqslv>.
- [21] D. G. Zill, M. R. Cullen. *Matemática Avançada para Engenharia*. Vol. 1 3ª Ed. Porto Alegre: Artmed Editora S.A., 2009.