

Soluções de Caráter Analítico para Problemas formulados na forma Integral

C. H. Kamphorst, E. M. Kamphorst, G. A. Grassi

Resumo — O presente trabalho tem por intuito apresentar uma metodologia de caráter analítico capaz de fornecer soluções fechadas para problemas formulados na forma integral, mediante o emprego de um método espectral que faz uso de uma expansão truncada em termos de splines cúbicas de Hermite, associada com um esquema de pontos de colocação. Salienta-se que a referida metodologia já foi empregada em trabalhos anteriores, na obtenção de soluções para problemas da dinâmica de gases rarefeitos em dutos cilíndricos [1], permitindo inclusive, a obtenção de resultados numéricos para quantidades de interesse físico via implementação das soluções em Fortran. Contudo, busca-se neste trabalho, evidenciar a possibilidade de emprego desta metodologia a uma classe mais ampla de problemas formulados na forma integral, bem como, a viabilidade de implementação das respectivas soluções em Maple. Neste intuito, o presente trabalho apresenta soluções para duas formulações integrais distintas, uma na qual se pode comparar o resultado obtido com a respectiva solução analítica e, outra, para uma aplicação da dinâmica de gases rarefeitos em dutos cilíndricos.

Palavras-Chave — Método Espectral, Splines Cúbicas de Hermite, Equação Integral.

I. INTRODUÇÃO

A obtenção de soluções analíticas para problemas de diferentes campos de aplicação nem sempre é uma tarefa fácil ou possível. Mesmo a aplicação de metodologias de caráter analítico, em geral, se restringe às equações utilizadas para descrever fenômenos físicos relativamente simples ou, então, que considerem simplificações significativas no modelo físico.

Contudo, a obtenção de soluções exatas ou soluções fechadas desempenha um papel importante na compreensão adequada das características qualitativas de muitos fenômenos e processos em diversas áreas das ciências.

Muitos problemas de vários campos da ciência podem ser formulados tanto por equações integrais como por

equações diferenciais, como por exemplo, problemas envolvendo transferência de massa e calor, elasticidade, oscilações, dinâmica dos fluidos, eletrostática, eletrodinâmica, biomecânica, teoria dos jogos, controle, engenharia elétrica, economia e dinâmica de gases [2]. Entretanto, em alguns casos, a utilização da forma integral pode facilitar a aplicação de técnicas de caráter analítico.

Kamphorst [1], em seu trabalho de tese de doutorado, fez uso de um método espectral que consiste no emprego de uma expansão truncada em termos de splines cúbicas de Hermite, associada à utilização de um esquema de pontos de colocação, a fim de obter soluções fechadas para dois problemas clássicos da dinâmica dos gases rarefeitos em dutos cilíndricos, denominados de Poiseuille e *Creep* Térmico, incluindo uma condição de superfície refletora que, até o presente momento, inviabilizou a aplicação de outra metodologia de caráter analítico. A referida metodologia permitiu ainda, a obtenção de resultados numéricos para quantidades de interesse físico, via implementação da solução em Fortran.

Assim sendo, buscou-se neste trabalho, apresentar um estudo desta metodologia, visando possibilitar seu emprego a uma classe mais ampla de problemas formulados na forma integral, bem como, sua implementação no sistema algébrico computacional Maple.

II. EQUAÇÕES INTEGRAIS

O emprego de formulações integrais em aplicações dos mais diversos campos das ciências justifica-se pela possibilidade de aplicação de técnicas de caráter analítico. No caso específico do estudo de um escoamento gasoso em nano ou micro dutos cilíndricos, a descrição do comportamento das partículas gasosas deve considerar a equação integro-diferencial de Boltzman ou, então, equações modelo, dela derivadas, que consideram a utilização de algum modelo cinético (modelo matemático usado para descrever o processo de interação das partículas). Mesmo considerando simplificações, as equações modelo possibilitam a obtenção de soluções de caráter analítico para os problemas fisicamente mais simples e, em geral, formulados em geometria cartesiana. Assim sendo, uma opção que tem possibilitado a aplicação de metodologias de caráter analítico para problemas da dinâmica dos gases rarefeitos em geometria cilíndrica, consiste na utilização de formulações integrais.

Segundo Barichello et al. [3], considerando como simplificações do modelo físico a possibilidade do gás possuir moléculas monoatômicas que sofrem apenas colisões binárias com frequência de colisão constante e, admitindo-se que a

C. H. Kamphorst é Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS e professor do Departamento de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, URI – Câmpus de Frederico Westphalen. (e-mail: carmo@uri.edu.br)

E. M. Kamphorst é Mestre em Modelagem Matemática pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUÍ e professora do Departamento de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, URI – Câmpus de Frederico Westphalen. (e-mail: anne@uri.edu.br)

G. A. Grassi é graduando do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, URI – Câmpus de Frederico Westphalen, bolsista PROBIC/FAPERGS do projeto Soluções Analíticas para Escoamentos de Gases Rarefeitos em Dutos Cilíndricos. (e-mail: gilbertoantoniograssi@hotmail.com).

reflexão das partículas que colidem com a parede sólida do duto seja perfeitamente difusa, tem-se a equação integral,

$$Z(r) = \int_0^R t Z(t) K(t \rightarrow r) dt + S(r), \quad (1)$$

associada ao modelo cinético BGK, para descrever o escoamento gasoso em um duto cilíndrico reto de raio R . Nela $t \in [0, R]$ e $Z(r)$ corresponde à função incógnita. O núcleo da equação integral é

$$K(t \rightarrow r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\tau^2} F_0(t/\tau, r/\tau) \frac{d\tau}{\tau^2}, \quad (2)$$

sendo o operador $F_0(t/\tau, r/\tau)$ definido por

$$F_0(t/\tau, r/\tau) = \begin{cases} I_0(t/\tau) K_0(r/\tau), & t < r \\ K_0(t/\tau) I_0(r/\tau), & t > r \end{cases} \quad (3)$$

em que, $I_0(x)$ e $K_0(x)$, são funções de Bessel modificadas de ordem zero, de primeira e segunda classe, respectivamente [4]. Ainda na Eq. (1), o termo $S(r)$ corresponde ao termo fonte, que para o problema de Poiseuille (problema clássico da dinâmica dos gases rarefeitos em que o escoamento se deve exclusivamente a existência de um gradiente de pressão na direção axial do duto) é

$$S(r) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (4)$$

e para o problema *Creep* térmico (onde o escoamento se deve a existência de um gradiente de temperatura na direção axial do duto) é

$$S(r) = R \int_0^\infty \tau e^{-\tau^2} K_1(R/\tau) I_0(r/\tau) dr. \quad (5)$$

Na formulação integral apresentada, uma vez conhecida a função incógnita $Z(r)$, que satisfaz a Eq. (1), torna-se possível a obtenção de grandezas de interesse físico, tais como o perfil de velocidade macroscópico das partículas do gás

$$u_p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Z(r) - \frac{1}{2} \quad (6)$$

e

$$u_T(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Z(r) - \frac{1}{4} \quad (7)$$

para os problemas de Poiseuille e *Creep* térmico, respectivamente. Do mesmo modo, outras grandezas de interesse físico, tais como: taxas de escoamento, fluxo de calor, perda de carga e viscosidade, também podem ser determinadas a partir de expressões que consideram a função incógnita $Z(r)$.

III. SPLINES CÚBICAS DE HERMITE

As splines Cúbicas de Hermite correspondem a funções cúbicas definidas em pequenos subintervalos determinados por $M + 1$ nós no intervalo $x \in [0, 1]$. Conforme Schultz [5], as splines cúbicas de Hermite de ordem α , $F_\alpha(x)$, com $\alpha = 0, 1, 2, \dots, (2M + 1)$, dependem dos nós

$$N_\alpha = (\alpha/M)^2, \quad (8)$$

para $\alpha = 0, 1, \dots, M$. Assim sendo, escolhido o número $M + 1$ de nós, tem-se $2M + 2$ splines cúbicas de Hermite $F_\alpha(x)$, de modo que exista um par de splines associadas a cada nó do domínio $x \in [0, 1]$.

Segundo Schultz [5], as splines cúbicas são definidas diferentemente para valores pares e ímpares de α . Para os valores pares é considerada uma função

$$\psi_\beta(x) = F_{2k}(x), \quad (9)$$

enquanto que para os valores ímpares de α ,

$$\varphi_\beta(x) = F_{2k+1}(x), \quad (10)$$

para $\beta = 0, 1, 2, \dots, M$. A definição das funções $\psi_\beta(x)$ e $\varphi_\beta(x)$ faz uso das expressões

$$f_\beta(x) = \frac{x - N_{\beta-1}}{N_\beta - N_{\beta-1}} \quad (11)$$

e

$$g_\beta(x) = \frac{N_{\beta+1} - x}{N_{\beta+1} - N_\beta}. \quad (12)$$

As funções $\psi_\beta(x)$ são determinadas pelas expressões:

$$\psi_0(x) = g_0^2(x) \cdot [3 - 2g_0(x)], x \in [N_0, N_1], \quad (13.a)$$

$$\psi_\beta(x) = \begin{cases} f_\beta^2(x) \cdot [3 - 2f_\beta(x)], & x \in [N_{\beta-1}, N_\beta] \\ g_\beta^2(x) \cdot [3 - 2g_\beta(x)], & x \in [N_\beta, N_{\beta+1}] \end{cases} \quad (13.b)$$

para $\beta = 1, 2, \dots, M - 1$ e,

$$\psi_M(x) = f_M^2(x) \cdot [3 - 2f_M(x)], se x \in [N_{M-1}, N_M], \quad (13.c)$$

sendo, que em cada caso, a imagem da função $\psi_\beta(x)$ igual a zero nos demais subintervalos do domínio de definição $x \in [0, 1]$. Do mesmo modo, as funções $\varphi_\beta(x)$, usadas para definir as splines cúbicas ímpares, são determinadas por:

$$\varphi_0(x) = x g_0^2(x), x \in [N_0, N_1], \quad (14.a)$$

$$\varphi_\beta(x) = \begin{cases} (x - N_\beta) f_\beta^2(x), & x \in [N_{\beta-1}, N_\beta] \\ (x - N_\beta) g_\beta^2(x), & x \in [N_\beta, N_{\beta+1}] \end{cases} \quad (14.b)$$

para $\beta = 1, 2, \dots, M$ e,

$$\varphi_M(x) = (x - N_M) f_M^2(x), x \in [N_{M-1}, N_M] \quad (14.c)$$

sendo, em cada caso, a imagem da função $\varphi_\beta(x)$ igual a zero nos demais subintervalos do domínio de definição $x \in [0,1]$.

A Figura 01 apresenta as representações gráficas das splines cúbicas de Hermite, realizadas em Maple a partir da implementação das Eqs. (13) e (14), para o caso em que se admite $M = 3$. Neste caso, os nós são as abscissas $0, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}$ e 1 (definidos pela Eq. (8)) e splines cúbicas definidas para as ordens zero a sete (quatro de ordem par e quatro de ordem ímpar). São elas:

- $F_0(x) = \psi_0(x) = \begin{cases} 1458x^3 - 243x^2 + 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{9} \\ 0, & \frac{1}{9} < x \leq 1 \end{cases}$
- $F_1(x) = \varphi_0(x) = \begin{cases} 81x^3 - 18x^2 + x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{9} \\ 0, & \frac{1}{9} < x \leq 1 \end{cases}$
- $F_2(x) = \psi_1(x) = \begin{cases} -1458x^3 + 243x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{9} \\ 54x^3 - 45x^2 + 8x + \frac{16}{27}, & \frac{1}{9} < x \leq \frac{4}{9} \\ 0, & \frac{4}{9} < x \leq 1 \end{cases}$
- $F_3(x) = \varphi_1(x) = \begin{cases} 81x^3 - 9x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{9} \\ 9x^3 - 9x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{16}{81}, & \frac{1}{9} < x \leq \frac{4}{9} \\ 0, & \frac{4}{9} < x \leq 1 \end{cases}$
- $F_4(x) = \psi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{9} \\ -54x^3 + 45x^2 - 8x + \frac{11}{27}, & \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{4}{9} \\ \frac{1458}{125}x^3 - \frac{3159}{125}x^2 + \frac{1944}{125}x - \frac{243}{125}, & \frac{4}{9} < x \leq 1 \end{cases}$
- $F_5(x) = \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{9} \\ 9x^3 - 6x^2 + x - \frac{4}{81}, & \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{4}{9} \\ \frac{81}{25}x^3 - \frac{198}{25}x^2 + \frac{153}{25}x - \frac{36}{25}, & \frac{4}{9} < x \leq 1 \end{cases}$
- $F_6(x) = \psi_3(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{4}{9} \\ -\frac{1458}{125}x^3 + \frac{3159}{125}x^2 - \frac{1944}{125}x + \frac{368}{125}, & \frac{4}{9} \leq x \leq 1 \end{cases}$
- $F_7(x) = \varphi_3(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{4}{9} \\ \frac{81}{25}x^3 - \frac{153}{25}x^2 + \frac{88}{25}x - \frac{16}{25}, & \frac{4}{9} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Constata-se, que as splines cúbicas de Hermite não apresentam descontinuidades ou singularidades que poderiam, por exemplo, dificultar a sua integração.

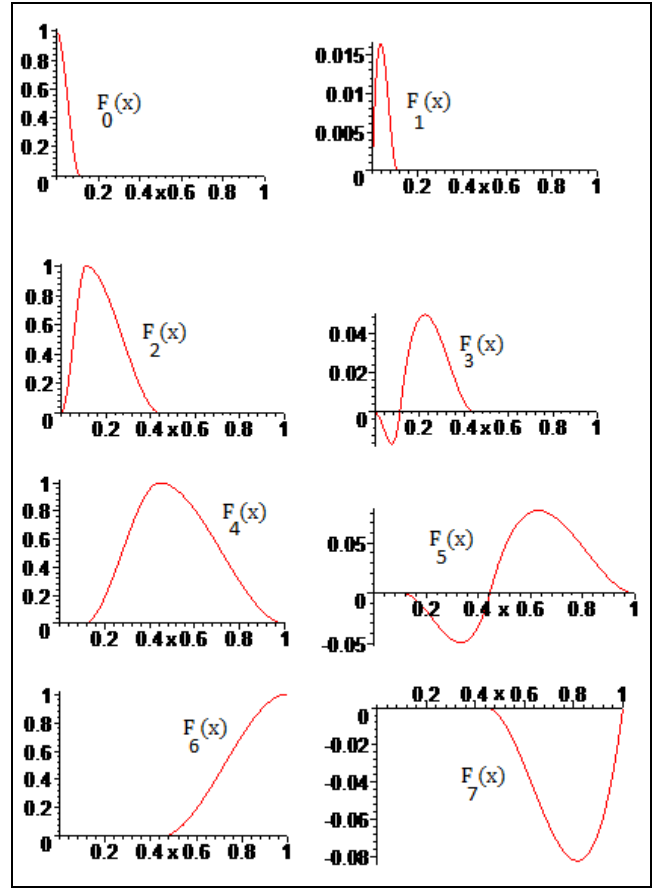


Figura 01: Splines Cúbicas de Hermite no caso $M = 3$.

IV. APRESENTAÇÃO DO MÉTODO ESPECTRAL

O método espectral consiste de uma metodologia de caráter analítico que se baseia na proposição de uma forma de solução fechada em termos de funções de base e coeficientes a determinar de modo que a expressão proposta satisfaça a formulação integral considerada.

A metodologia apresentada neste trabalho, porém, considera o emprego de uma expansão truncada em termos de splines cúbicas de Hermite, associada ao emprego de um sistema de pontos de colocação.

A fim de apresentar tal metodologia, já utilizada anteriormente por Kamphorst [1], consideremos a equação integral

$$f(x) = \frac{4\pi x \operatorname{sen}(4\pi x)}{2\pi - 1} \int_0^1 f(y) dy + x, \quad (15)$$

com $x \in [0,1]$, que admite solução analítica

$$f(x) = x \sin(4\pi x) + x. \quad (16)$$

Inicialmente, propõe-se uma solução $f(x)$ na forma de uma expansão truncada em termos de splines cúbicas de Hermite de ordem α , $F_\alpha(x)$,

$$f(x) = \sum_{\alpha=0}^L a_{\alpha} F_{\alpha}(x), \quad (17)$$

em que a_{α} são constantes que devem ser determinadas de modo que a expansão proposta satisfaça a equação integral (Eq. (1)). Substituindo a expansão na Eq. (1), é possível escrever

$$\sum_{\alpha=0}^L a_{\alpha} \left[F_{\alpha}(x) - \frac{4\pi x \sin(4\pi x)}{2\pi - 1} \int_0^1 F_{\alpha}(y) dy \right] = x. \quad (18)$$

Aplicando-se, agora, o esquema de pontos colocação definido por

$$x_i = \left(\frac{i}{L} \right)^2, \quad (19)$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, L$, obtém-se,

$$\sum_{\alpha=0}^L a_{\alpha} \left[F_{\alpha}(x_i) - \frac{4\pi x_i \sin(4\pi x_i)}{2\pi - 1} \int_0^1 F_{\alpha}(y) dy \right] = x_i \quad (20)$$

Após a avaliação das integrais envolvidas, a Eq. (20) resulta em um sistema algébrico linear de ordem $L + 1$ ($2M + 2$), cuja solução é o conjunto de constantes a_{α} da expansão proposta da Eq. (17), definindo assim, uma solução fechada para a Eq. (15).

Resultados numéricos para a solução espectral, encontrada a partir da resolução do sistema dado pela Eq. (20), podem ser determinados em Maple. O Maple consiste de um sistema computacional algébrico no qual as integrais podem ser avaliadas mediante o emprego da função *int* e, a solução do sistema algébrico pode ser obtida com o comando *linsolve* do pacote *linalg* (disponível no Maple). Assim sendo, usando o parâmetro de entrada $M = 10$ (que resulta em uma expansão com $L = 21$ e, conseqüentemente em um sistema linear de ordem 22), são encontradas as constantes indicadas na Tabela 1.

Substituindo as constantes da Tabela 1 na Eq. (17), tem-se uma solução fechada (válida para todo o domínio de definição $x \in [0,1]$). A representação gráfica desta solução, bem como, da respectiva solução analítica indicada na Eq. (18), são apresentadas na Figura 02. Consta-se que há uma boa concordância entre ambas, mesmo usando uma ordem de expansão baixa ($L = 21$). Contudo, observando os erros absolutos, observa-se uma convergência mais rápida nos valores de x próximos de zero.

A Figura 03 apresenta o gráfico dos erros absolutos cometidos mediante o truncamento da solução em $L = 21$. Consta-se um erro relativo máximo próximo de 6% em $x \cong 0,96$. Todavia este erro diminui muito na medida em que optamos por ordens de expansão maiores. Usando o parâmetro de entrada $L = 101$, por exemplo, obtém-se, para o caso em estudo, o gráfico de erro absolutos indicado na Figura 04 e um erro relativo máximo inferior a 0,035%.

Tabela 1. Constantes da Expansão Proposta com $L=21$

α	a_{α}
0	0
1	0.9992131044842768181
2	0.0112479871746410982
3	1.2461845486026868083
4	0.0592174175311318060
5	1.9175704019187060790
6	0.1713114651444029438
7	2.3956815767215633266
8	0.3048515720906985069
9	1.0808829557414977060
10	0.2505777526760416885
11	-2.1522506625809439193
12	0.0060071576056566425
13	-0.8899935904556869071
14	0.4254196094196357202
15	7.1985514579796437178
16	1.2705301043406726030
17	0.3759063820153543097
18	0.2627541145686569601
19	-8.0040107531992580961
20	1.000000000000000084
21	15.790833085975352703

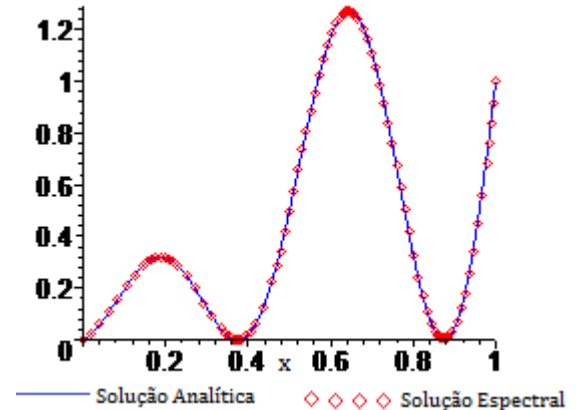


Figura 02: Gráfico das Soluções com $L=21$

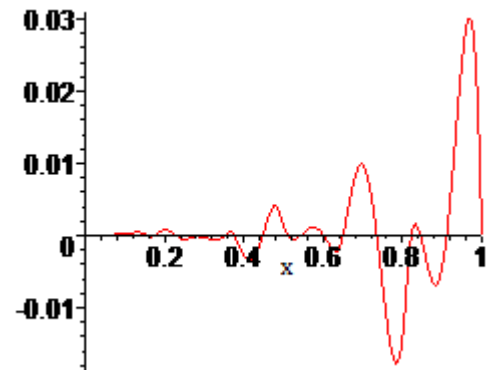


Figura 03: Gráfico dos Erros Absolutos com $L=21$

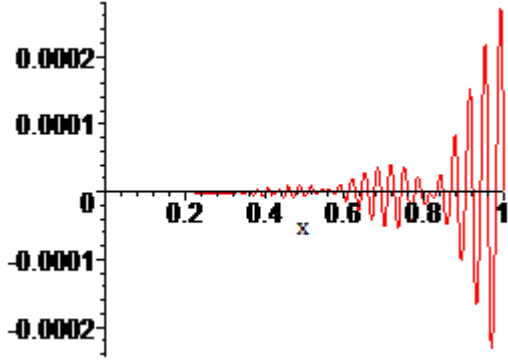


Figura 04: Gráfico dos Erros Absolutos com $L=101$

V. SOLUÇÕES DE CARÁTER ANALÍTICO PARA PROBLEMAS DA DINÂMICA DOS GASES RAREFEITOS

Com o intuito de evidenciar a aplicabilidade do método espectral anteriormente apresentado, na obtenção de uma solução fechada para problemas envolvendo escoamentos de gases rarefeitos em dutos cilíndricos, considera-se a formulação integral do modelo cinético BGK, indicada na Eq. (1).

Levando em consideração o intervalo de integração $t \in [0, R]$ da Eq. (1) e, o intervalo de definição das splines cúbicas de Hermite, $x \in [0, 1]$, propõe-se, inicialmente, uma solução na forma

$$Z(r) = \sum_{\alpha=0}^L a_{\alpha} F_{\alpha} \left(\frac{r}{R} \right). \quad (21)$$

Na expansão proposta na Eq. (21), $F_{\alpha}(x)$ são splines cúbicas de Hermite de ordem α , com $\alpha = 0, 1, 2, \dots, L$, definidas a partir de $M + 1$ nós do intervalo $x \in [0, 1]$ [5]. Ainda na Eq. (21), a_{α} são os coeficientes constantes que precisam ser determinados de modo que a expansão satisfaça a formulação integral (Eq.(1)).

Substituindo a Eq. (21) na formulação integral (Eq. (1)) e, promovendo a troca de variáveis,

$$x = \frac{r}{R} \quad (22)$$

e

$$y = \frac{t}{R}, \quad (23)$$

bem como, utilizando o esquema de pontos de colocação

$$x_i = \left(\frac{i}{L} \right)^2, \quad i = 0, 1, 2, \dots, L, \quad (24)$$

é possível reescrever a Eq. (1), na forma,

$$\sum_{\alpha=0}^L a_{\alpha} \{F_{\alpha}(x_i) - R^2 [U_{\alpha}(x_i) + V_{\alpha}(x_i)]\} = S(Rx_i). \quad (25)$$

Na eq. (25), a presença dos termos $U_{\alpha}(x_i)$ e $V_{\alpha}(x_i)$ se deve a subdivisão do intervalo de integração, realizado em razão da descontinuidade do operador do núcleo da equação integral, em $r = t$, conforme pode ser observado na Eq. (3). Deste modo, os termos $U_{\alpha}(x_i)$ e $V_{\alpha}(x_i)$, correspondem, respectivamente, a

$$U_{\alpha}(x_i) = \int_0^{x_i} y F_{\alpha}(y) K(Ry \rightarrow Rx_i) dy \quad (26)$$

e

$$V_{\alpha}(x_i) = \int_{x_i}^1 y F_{\alpha}(y) K(Ry \rightarrow Rx_i) dy. \quad (27)$$

Assim sendo, após avaliação das integrais, a Eq. (25) consiste em um sistema algébrico linear de ordem $L + 1$ ($M + 2$), cuja solução é o conjunto de coeficientes a_{α} da expansão proposta, de modo que a mesma satisfaça a formulação integral. Logo, tem-se uma solução fechada (Eq. (17)) que torna possível a obtenção das quantidades de interesse físico.

Contudo, as singularidades do núcleo da equação integral e das funções modificadas de Bessel utilizadas na sua definição, inviabilizam a avaliação do núcleo e das integrais das Eqs. (26) e (27), em Maple, sem a realização de algumas adequações.

VI. ASPECTOS COMPUTACIONAIS E RESULTADOS NUMÉRICOS

A fim de obter resultados numéricos para quantidades de interesse físico dos problemas de Poiseuille e *Creep* térmico, a partir da solução espectral apresentada anteriormente, faz-se necessária a realização de algumas adequações. As alternativas apresentadas a seguir já foram utilizadas por Kamphorst [1] na obtenção de resultados numéricos da solução apresentada, em Fortran.

Por razões computacionais (evitar problemas de *overflow*), uma das adequações necessárias para avaliação das integrais, consiste na utilização das funções

$$\hat{I}_0(x) = I_0(x)e^{-x} \quad (28)$$

e

$$\hat{K}_0(x) = K_0(x)e^x, \quad (29)$$

na definição do operador do núcleo da equação integral, indicado na Eq. (3). Desse modo, considerando também as trocas de variáveis indicadas nas Eqs. (22) e (23) e o emprego do esquema de pontos de colocação, o operador $F_0(Ry/\tau, Rx_i/\tau)$ passa a ser definido por

$$\hat{F}_0(Ry/\tau, Rx_i/\tau) = \begin{cases} \hat{I}_0(Ry/\tau)\hat{K}_0(Rx_i/\tau)e^{\frac{R(y-x_i)}{\tau}}, & y < x_i, \\ \hat{K}_0(Ry/\tau)\hat{I}_0(Rx_i/\tau)e^{\frac{R(x_i-y)}{\tau}}, & y > x_i \end{cases}, \quad (30)$$

Salienta-se que as funções $\hat{I}_0(x)$ e $\hat{K}_0(x)$ podem ser avaliadas, em Maple, a partir da implementação de um algoritmo numérico do pacote LINPACK [6]. Mesmo assim, a avaliação do núcleo da equação integral,

$$K(Ry \rightarrow Rx_i) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} \hat{F}_0(Ry/\tau, Rx_i/\tau) \frac{d\tau}{\tau^2}, \quad (31)$$

impõe dificuldades para sua avaliação quando os argumentos Ry e Rx_i assumem valores próximos. Optou-se então, pela utilização de uma metodologia já utilizada por Kamphorst [1], que consiste em subtrair e somar a expressão

$$S_1(Ry, Rx_i) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{F}_0(Ry/\tau, Rx_i/\tau) \frac{d\tau}{\tau^2}, \quad (32)$$

à Eq. (31), nos casos em que $|Ry - Rx_i| < 0,05$. Assim sendo, obtém-se

$$K(Ry \rightarrow Rx_i) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} (e^{-\tau^2} - 1) \hat{F}_0(Ry/\tau, Rx_i/\tau) \frac{d\tau}{\tau^2} + S_1^*(Ry, Rx_i). \quad (33)$$

Na Eq. (33), o termo $S_1^*(Ry, Rx_i)$ corresponde à avaliação do termo $S_1(Ry, Rx_i)$,

$$S_1^*(Ry, Rx_i) = \frac{2}{Rx_i\sqrt{\pi}} \text{EllipticK}\left(\frac{y}{x_i}\right) \quad (34)$$

e

$$S_1^*(Ry, Rx_i) = \frac{2}{Ry\sqrt{\pi}} \text{EllipticK}\left(\frac{x_i}{y}\right), \quad (35)$$

para os casos em que $y < x_i$ e $y > x_i$, respectivamente, sendo $\text{EllipticK}(x)$ a integral elíptica completa de primeira ordem [4].

Na sequência realizou-se ainda a troca de variáveis

$$s(\tau) = \frac{1}{1+\tau}. \quad (36)$$

bem como, a soma e a subtração do termo

$$S_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-s} \hat{K}_0(s) ds \quad (37)$$

à Eq. (33), resultando em

$$K(Ry \rightarrow Rx_i) =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (g(s) \hat{F}_0(Ry/\tau(s), Rx_i/\tau(s)) + e^{-s} \hat{K}_0(s)) ds + S_1^*(Ry, Rx_i) - S_2. \quad (38)$$

Na Eq. (38), S_2 é diretamente avaliado em Maple ($S_2 = 1,40202222809807033$),

$$g(s) = \frac{e^{-\tau(s)^2} - 1}{s^2\tau(s)^2} \quad (39)$$

$$\tau(s) = \frac{1-s}{s}. \quad (40)$$

As modificações sugeridas no núcleo da equação integral, que resultaram na Eq. (38), transformaram o integrando em um termo com comportamento gráfico mais suave. Optou-se, então, pela integração numérica via quadratura de Gauss-Legendre. Desse modo, a avaliação do núcleo da equação integral passou a ser realizada pelas expressões

$$K(Ry \rightarrow Rx_i) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^N \omega_n \frac{\hat{F}_0(Ry/z_n, Rx_i/z_n) e^{-z_n^2}}{(\mu_n + 1)z_n^2} \quad (41)$$

e

$$K(Ry \rightarrow Rx_i) = C(y, x_i) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^N \omega_n [A_{n,i}(y) + B_n], \quad (42)$$

para os casos em que $|Ry - Rx_i| \geq 0,05$ e $|Ry - Rx_i| < 0,05$, respectivamente.

Nas Eqs. (41) e (42), N corresponde ao número de pontos e pesos da quadratura de Gauss-Legendre, μ_n e ω_n , empregados na avaliação numérica das integrais, enquanto que

$$z_n = -\ln\left(\frac{\mu_n + 1}{2}\right), \quad (43)$$

$$C(y, x_i) = S_1^*(Ry, Rx_i) + S_2, \quad (44)$$

$$A_{n,i}(y) = \frac{4(e^{(p_n^\tau)^2} - 1)\hat{F}_0(Ry/p_n^\tau, Rx_i/p_n^\tau)}{(1 - \mu_n)^2} \quad (45)$$

e

$$B_n = e^{p_n^s} \hat{K}_0(p_n^s), \quad (46)$$

sendo,

$$p_n^\tau = \frac{1 - \mu_n}{1 + \mu_n} \quad (47)$$

e

$$p_n^s = \frac{\mu_n + 1}{2}. \quad (48)$$

Com isso, embora muito lentamente, é possível efetuar a avaliação do núcleo da equação integral em Maple.

Tendo em vista a redução do esforço computacional, optou-se ainda, pela integração dos termos $U_\alpha(x_i)$ e $V_\alpha(x_i)$ apenas nos subintervalos $[d_\alpha, e_\alpha]$ para os quais as splines cúbicas $F_\alpha(y)$ não são nulas. Assim sendo, as Eqs. (26) e (27) podem ser reescritas do seguinte modo:

$$U_\alpha(x_i) = \int_{d_\alpha}^{m_{\alpha,i}} y F_\alpha(y) K(Ry \rightarrow Rx_i) dy \quad (49)$$

e

$$V_\alpha(x_i) = \int_{n_{\alpha,i}}^{e_\alpha} y F_\alpha(y) K(Ry \rightarrow Rx_i) dy, \quad (50)$$

em que

$$m_{\alpha,i} = \min\{x_i, e_\alpha\} \quad (51)$$

e

$$n_{\alpha,i} = \max\{x_i, d_\alpha\}. \quad (52)$$

E, também propondo sua avaliação mediante aplicação da quadratura de Gauss-Legendre, tem-se

$$U_\alpha(x_i) = \frac{m_{\alpha,i} - d_\alpha}{2} \sum_{n=1}^N \omega_n y_1^* F_\alpha(y_1^*) K(Ry_1^* \rightarrow Rx_i) \quad (53)$$

e

$$V_\alpha(x_i) = \frac{e_\alpha - n_{\alpha,i}}{2} \sum_{n=1}^N \omega_n y_2^* F_\alpha(y_2^*) K(Ry_2^* \rightarrow Rx_i). \quad (54)$$

Nestas expressões os termos y_1^* e y_2^* são oriundos das trocas de variáveis necessárias para aplicação da quadratura de Gauss-Legendre, sendo definidos, respectivamente, por

$$y_1^* = \frac{(m_{\alpha,i} - d_\alpha)\mu_n + m_{\alpha,i} + d_\alpha}{2} \quad (55)$$

e

$$y_2^* = \frac{(e_\alpha - n_{\alpha,i})\mu_n + n_{\alpha,i} + e_\alpha}{2}. \quad (56)$$

Assim sendo, torna-se possível a avaliação de todos os termos do sistema linear indicada na Eq. (25). A solução deste sistema pode ser obtida com o comando *linsolve* do pacote *linalg* e, uma vez conhecida define a solução proposta

na Eq. (17). Consequentemente, torna-se possível a obtenção de resultados numéricos para quantidades de interesse físico.

As Figuras 05 e 06, apresentam a representação gráfica dos perfis de velocidade obtidos para os problemas de Poiseuille e *Creep* Térmico obtidas, em Maple, com a utilização dos parâmetros de entrada $R = 0.01$, $N = 30$ (trinta pontos de quadratura) e $M = 10$ (expansão $L = 21$) e, o conseqüente emprego das Eqs. (6) e (7). Ressalta-se que os resultados numéricos, assim obtidos, concordam em três a quatro dígitos com resultados disponíveis na literatura [7], em um tempo computacional de aproximadamente cinco horas.

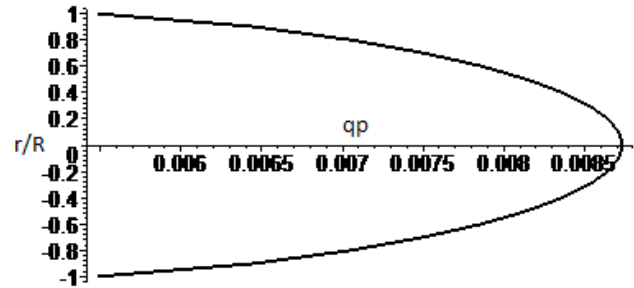


Figura 05: Perfil de Velocidades de Poiseuille

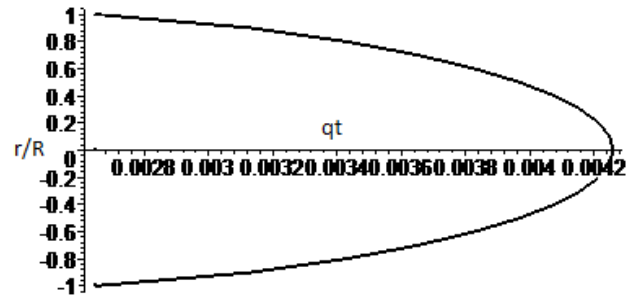


Figura 06: Perfil de Velocidades do *Creep* Térmico

VII. CONCLUSÃO

Com a realização do presente trabalho evidenciou-se a possibilidade de aplicação de um método espectral, baseado no emprego de uma expansão em termos de splines cúbicas de Hermite, na obtenção de soluções de caráter analítico (soluções fechadas) para problemas formulados na forma integral.

Constatou-se ainda, a possibilidade de implementação do método em Maple. Contudo, salienta-se, que apesar deste sistema computacional algébrico possuir algumas funções que favorecem a obtenção de resultados numéricos, a presença de singularidades nas formulações pode exigir algum tratamento numérico, que poderá resultar em grande esforço computacional.

Neste trabalho foram tratadas duas situações propostas nas Eqs. (15) e (1), respectivamente. A primeira delas considera uma equação integral relativamente simples, a qual favoreceu a obtenção de resultados numéricos, em Maple, em um tempo computacional reduzido (aproximadamente 1 minuto no caso $M=10$). Todavia, a formulação integral usada para descrever o escoamento de um gás rarefeito exigiu um

tratamento numérico de singularidades, fato esse que demandou um esforço computacional muito elevado.

Ressalta-se ainda, a perspectiva de aperfeiçoamento da metodologia mediante o emprego de expansões em termos de polinômios ortogonais, haja vista que determinadas propriedades destes polinômios poderão favorecer a obtenção de resultados numéricos com maior precisão e menor esforço computacional.

VIII. REFERÊNCIAS

- [1] C. H. Kamphorst. “Fluxo de Gases Rarefeitos em Dutos Cilíndricos: Uma abordagem via Equações Integrais”, Tese de Doutorado. Porto Alegre, UFRGS, 2009.
- [2] A. D. Poluanin and A. V. Manzhirov. “Handbook of Integral Equations.” Second Edition. Chapman & Hall, New York, 2008.
- [3] L. B. Barichello; M. Camargo; P. Rodrigues and C. E. Siewert. An Integral Equation Basic to the BGK Model for Flow in a Cylindrical Tube, “Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik”, vol. 53, 2002, p. 769-781.
- [4] M. Abramowitz and I. Stegun. “Handbook of Mathematical Functions.” Dover Pub., New York, 1965.
- [5] M. H. Schultz. “Spline Analysis.” Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [6] J. J. Dongarra; J. R. Bunch; C. B. Moler and G. W. Stewart. “Linpack User’s Guide.” Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1979.
- [7] C. E. Siewert. Poiseuille and Thermal-Creep flow in a cylindrical tube. “Journal of Computational Physics”, vol. 160, 2000, p. 470-480.