

# Análises de Complexidade e Numérica do Modelo Hidrológico para Previsões de Inundações em Rios

Alice Fonseca Finger, Aline Brum Loreto

**Resumo**—O presente trabalho propõe identificar, explorar e analisar em termos de custo computacional e numérico um modelo hidrológico que prevê inundações em rios. Para o modelo identificado (e adotado) aplicam-se métodos numéricos com a finalidade de tornar o modelo mais simples, mas retornando resultados satisfatórios, comparados com os resultados do modelo teórico. Modelos hidrológicos existentes na literatura representam matematicamente o fluxo de água e seus constituintes sobre alguma parte da superfície e/ou subsuperfície terrestre. Porém, esses modelos são complexos e de difícil aplicação. Para que tornem-se melhor aplicáveis adota-se um modelo teórico matemático que possibilita prever o tempo de inundação em rios, onde nas resoluções das equações que representam o modelo, aplicam-se métodos numéricos, a fim de identificar qual apresenta melhor solução, considerando o esforço computacional e a exatidão da solução, comparado com a solução proposta pelo modelo. O modelo hidrológico adotado realiza a previsão através da solução de Burgers, porém esse método possui complexidade polinomial  $O(n^{r+1})$ . Neste trabalho verifica-se a viabilidade da utilização de métodos de passos simples, com complexidade de ordem linear  $O(n)$ . Após a escolha do método numérico realiza-se a simulação numérica de inundação considerando dados hidrológicos pertinentes à área física de um determinado arroio da região sul do Rio Grande do Sul(RS).

**Palavras chave**—Inundação, complexidade, métodos numéricos.

## I. INTRODUÇÃO

Inundações ocorrem quando há precipitações intensas com duração suficiente para ultrapassar a capacidade do volume de água do rio, alagando terras próximas. Existem medidas estruturais e não estruturais para evitar as enchentes, todavia as medidas não estruturais são as mais recomendadas e ideais no controle de inundações, pois envolvem menos investimento e não causam impactos ambientais, atuando na minimização das consequências advindas destes eventos [1].

O número de inundações em rios tem aumentado significativamente em diversas localidades do Brasil em decorrência do crescimento desordenado das cidades brasileiras, do aumento do número de ocupações as margens de rios. Essas inundações causam um enorme prejuízo econômico, como, por exemplo, interrupção da atividade econômica na área inundada e prejuízo social como perdas materiais e humanas [1]. A população de maior poder aquisitivo tende a habitar os locais seguros, ao contrário da população carente, que ocupa as áreas de alto risco de inundação, provocando problemas sociais que se repetem por ocasião de cada cheia na região. Quando

a frequência das inundações é baixa, a população ganha confiança e ignora o risco aumentando significativamente o investimento e a densificação nas áreas inundáveis.

Um modelo pode ser considerado como uma representação simplificada da realidade, auxiliando no entendimento dos processos que envolvem essa realidade. Os modelos estão sendo cada vez mais utilizados em estudos ambientais, pois ajudam a entender o impacto das mudanças no uso e cobertura da terra e prever alterações futuras no ecossistema [2].

De maneira geral, um modelo é um sistema de equações e procedimentos compostos por variáveis e parâmetros, os quais mantêm seu valor inalterado durante todo o processo estudado. Assim, um parâmetro possui o mesmo valor para todos os intervalos de tempo, o que não significa que ele não possa variar espacialmente. As variáveis podem também mudar ao longo do tempo em que o modelo estiver sendo executado [3].

O modelo hidrológico é uma das ferramentas que a ciência desenvolveu, para melhor entender e representar o comportamento da bacia hidrográfica e prever condições diferentes das observadas.

A simulação hidrológica é limitada pela heterogeneidade física da bacia e dos processos envolvidos, o que tem propiciado o desenvolvimento de um grande número de modelos que se diferenciam em função dos dados utilizados, discretização, das propriedades da representação dos processos e dos objetivos a serem alcançados [4].

Para prever o dia de inundação em rios pode-se adotar um modelo hidrológico, porém, modelos hidrológicos geralmente são complexos e demandam uma quantidade considerável de dados espaciais e temporais, os quais são muitas vezes indisponíveis no Brasil, fato este que acaba de certa forma limitando a aplicação dos mesmos. Com a finalidade de tornar a aplicação de um modelo hidrológico mais simples, identifica-se um modelo hidrológico que simule inundação de rios e que possibilite adequação de dados como comprimento de rio, lagura, etc.

Dentre diversos modelos teóricos estudados, escolhe-se o modelo teórico matemático devido a Nachbin [3], por permitir adaptações quanto ao comprimento e extensão do rio (considerando rios mais compridos do que largos), número de subdivisões ao longo do comprimento do rio e intervalo de tempo para estimar o dia que o rio irá transbordar devido às precipitações intensas. A estimativa temporal é obtida através da solução de Burgers. Porém, essa solução requer elevado custo computacional devido ao grande número de operações que devem ser efetuadas.

O presente trabalho propõe realizar a estimativa temporal através de soluções numéricas obtidas das aplicações de mé-

A.F.F. é aluna de graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Pelotas. e-mail: (affinger@inf.ufpel.edu.br).

A.B.L. é professora Doutora do Centro de Desenvolvimento Tecnológico da Universidade Federal de Pelotas. e-mail: (aline.loreto@inf.ufpel.edu.br).

todos numéricos de passos simples, que possuem melhor complexidade computacional do que a solução de Burgers (solução do modelo adotado). Para tanto, é realizada a análise da complexidade de métodos numéricos de passos simples e de Burgers [5], confirmando que o problema de previsão do tempo de inundação de um rio pode ser resolvido com métodos que possuem complexidade de tempo linear.

Comparando as soluções desses métodos numéricos, que exigem menos esforço computacional que o método de Burgers, sugerido no modelo teórico adotado, identifica-se qual método de passos simples melhor aplica-se para um rio conforme a estabilidade. Sendo assim, o presente trabalho propõe estimar o dia em que o volume de um rio irá transbordar, através de aplicações de métodos numéricos que possuem complexidade computacional de ordem linear.

Com a aplicação desses métodos numéricos de passos simples, verifica-se a possibilidade de obter previsões de inundações de forma mais simples, e portanto, fornecer à defesa civil estadual, e demais órgãos de competência, previsões de futuras inundações.

## II. MODELOS HIDROLÓGICOS

Existe um grande número de elementos que necessitam ser entendidos na utilização de um modelo hidrológico para um determinado problema [4]. Aspectos como: objetivos do estudo; características da bacia e do rio; disponibilidade de dados e familiaridade com o modelo são uns dos principais aspectos.

O objetivo para o qual o modelo é utilizado influencia na escolha do mesmo, já que modelos com muitos parâmetros podem ser ineficientes quando o problema não exige grande detalhamento dos processos. Como o modelo tem limitações em representar perfeitamente os processos é necessário ser pragmático na sua utilização, buscando atender aos objetivos do estudo [4]. A maioria dos modelos busca uma representação mais detalhada nos processos dominantes como: infiltração e escoamento não-saturado; escoamento superficial e em rios e escoamento subterrâneo. Os outros processos são tratados de forma simplificada e com pouco detalhe. Portanto, a escolha do modelo deve verificar o grau de confiabilidade do mesmo na representação dos processos dominantes na bacia em estudo.

É necessário conhecer bem as vantagens e desvantagens de cada modelo e das técnicas para melhor utilizar os modelos e os algoritmos existentes. Os dados existentes também podem influenciar, uma vez que podem inviabilizar algumas metodologias mais sofisticadas que exigem muitas informações enquanto que outras que utilizam poucos parâmetros relacionados com alguns indicadores podem ser úteis para responder as questões pendentes. A quantidade e a representatividade das informações para ajuste e verificação de um modelo hidrológico é fundamental para permitir um resultado de qualidade. Por fim, um outro aspecto importante é a familiaridade com o modelo, onde o melhor modelo costuma ser aquele com que o usuário apresenta maior familiaridade sobre o seu uso, dentre os aplicáveis a um problema.

### A. Modelos Pesquisados

A seguir apresentam-se modelos hidrológicos que foram estudados para verificar a possibilidade de adaptações quanto ao comprimento e extensão do rio (considerando rios mais compridos do que largos), número de subdivisões ao longo do comprimento do rio e intervalo de tempo para estimar o dia que o rio irá transbordar devido às precipitações intensas. Todos os modelos foram citados por Tucci [4].

1) *Modelo SSARR*: Este modelo foi desenvolvido pelo U.S Corps of Engineers sob o nome Streamflow Synthesis and Reservoir Regulation. O modelo completo constitui-se de três partes: a) Modelo que simula o processo precipitação-vazão na bacia; b) modelo que simula o escoamento em rios e reservatórios; e c) modelo para regularização de reservatórios. Apresenta-se o módulo precipitação-vazão que se integra ao módulo de rio.

Este modelo determina a precipitação e a acumulação de neve que chega a bacia, estabelece a parcela retida pelo solo e o volume que gera escoamento (sub-superficial, superficial e subterrâneo). Considera-se a precipitação média e discretização temporal, a umidade do solo, a distribuição dos volumes e a propagação do volume de escoamento. O modelo tem sido utilizado em bacias de grande porte. As funções parâmetros utilizadas dificultam o seu ajuste para usuário que não conheça suficientemente o modelo e o número de parâmetros é grande.

2) *Modelo IPHII*: O modelo foi desenvolvido com o objetivo de permitir seu uso para projetos de engenharia em bacias rurais e urbanas. Ele utiliza poucos parâmetros e é baseado em algoritmos conhecidos. É utilizado para bacias que não necessitem propagação no leito do rio ou que este efeito não seja importante no processo, já que a propagação considerada no modelo se refere somente ao escoamento na superfície da bacia. O modelo é composto pelos seguintes algoritmos: perdas por evaporação e interceptação; separação dos escoamentos; propagação do escoamento superficial; propagação subterrânea; otimização dos parâmetros (opcional).

3) *Modelo SCS*: O modelo foi apresentado pelo Soil Conservation Service (1975) e tem sido utilizado para simulação de hidrogramas de cheias de projeto de obras hidráulicas bem como para o estabelecimento de risco de enchente para um determinado local. Devido ao reduzido número de parâmetros e a relação entre os parâmetros e características físicas da bacia, esse modelo tem sido utilizado em todo o mundo.

O modelo não foi desenvolvido com o compromisso de representar um evento em específico, mas para ser utilizado para estimar o hidrograma de projeto (vazão máxima) com um determinado risco. Pode ser utilizado em conjunto com um modelo de escoamento em rios e canais, para simular a propagação de hidrogramas de diferentes sub-bacias, originalmente foi preparado para simular de forma concentrada uma bacia. Em sua estrutura existem algoritmos de precipitação de projeto que envolvem diferentes critérios relacionados com o tipo de obra ou problema estudado, algoritmos de determinação do volume superficial, os quais utilizam uma expressão que relaciona a razão entre a precipitação total acumulada com o volume superficial acumulado e a razão entre a infiltração e o escoamento da bacia. Por fim, utiliza algoritmo de propagação

superficial, no qual o volume gerado pela separação do escoamento é propagado até o rio através do uso do Hidrograma Unitário.

**B. Modelo de Nachbin - Adotado**

O modelo teórico adotado considera um rio muito mais longo do que largo, como mostra a Figura 1. Esse fato tem uma consequência muito importante no nosso processo de modelagem, pois pode-se modelar a dinâmica de ondas em rios sem considerar detalhes do escoamento em cada seção transversal.

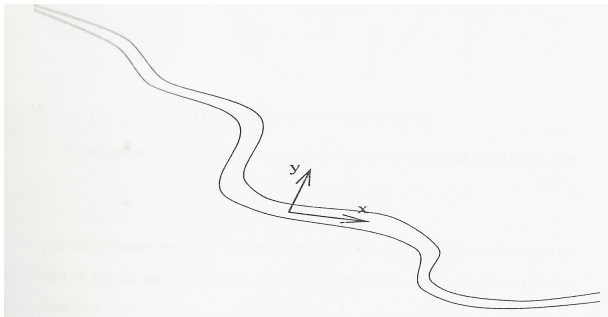


Figura 1. Vista superior do rio.

O modelo devido a Nachbin [3] é um modelo unidimensional que considera apenas variações do escoamento médio na direção longitudinal, desprezando as variações na direção transversal. Uma das hipóteses para o modelo unidimensional é que em um corte transversal do rio a velocidade da água varia muito pouco. Neste contexto, as velocidades em todos os pontos dessa seção não diferem muito da média em si. Sendo assim, trabalhando com apenas uma velocidade, economiza-se esforço, pois manipula-se apenas uma grandeza ao invés de várias grandezas muito parecidas. As suposições feitas só são válidas porque considera-se ondas muito longas, como as provenientes de inundações originadas a montante (na região mais alta do rio, ou seja, quando segue-se em direção à nascente) e as geradas por chuvas extremamente fortes. Essas ondas irão propagar em direção a cidades populosas a jusante (região mais baixa do rio, quando segue-se na direção à foz), podendo causar graves problemas às cidades ribeirinhas [3].

O modelo adotado estuda grandezas médias que são funções de  $x$ , a coordenada ao longo do rio, e do tempo  $t$ . As duas grandezas médias de interesse são a altura da superfície da água  $h(x, t)$  e a velocidade média do escoamento  $U(x, t)$  através de uma seção transversal do rio naquele ponto  $x$ . Seja a seção transversal de água  $S(x, t)$  definida como a área molhada ao cortar o rio transversalmente por um plano, e o escoamento total através de uma seção transversal, por unidade de tempo, denotado por  $Q(x, t)$  (Figura 2). Em outras palavras,  $Q$  é a vazão, a taxa de variação do volume no tempo. A altura da superfície livre é determinada de forma única pela função  $S(x, t)$  em cada seção, já que é função crescente da outra.

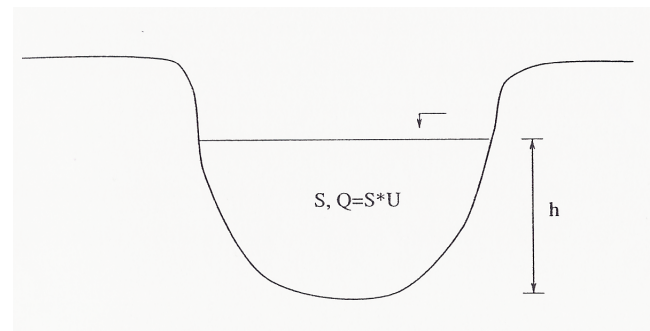


Figura 2. Seção transversal do rio.

O modelo teórico matemático devido a Nachbin [3], que dinamiza ondas em rios, também respeita fatores como chuvas extremamente fortes por uma semana seguida à situação normal e grandezas médias como comprimento ( $x$ ), largura ( $y$ ), tempo ( $t$ ) e superfície ( $S$ ). É importante salientar que chuvas locais, evaporação, infiltração de água no solo e as variações no escoamento em cada seção transversal são desprezadas nesse modelo. Porém, desprezando tais fenômenos não interfere na correta previsão das inundações, além de tornar o modelo mais simples restringe a aplicação para situações mais pontuais.

O sistema matemático de duas equações e duas incógnitas dependentes, o qual representa como as variações do escoamento médio de água influenciam na variação da área da seção transversal, é descrito abaixo:

$$S_t(x, t) = -Q_x(x, t) \tag{1}$$

$$Q = \frac{S^2}{2} \tag{2}$$

onde

$Q(x,t)$  é a taxa de variação do volume no tempo;

$S(x,t)$  é a altura da superfície livre em cada seção transversal.

A equação diferencial (1) é obtida a partir do princípio de conservação de massa entre as seções  $x_1$  e  $x_2$  e pela Lei Hidrológica (equação(2)).

Através de aproximações em  $S_x$  e  $S_t$  na equação (1) e avaliações no ponto  $x_j$  e no instante  $t_n$  é encontrada a seguinte equação de diferenças (forma não-conservativa da massa):

$$S_j^{n+1} = S_j^n - S_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (S_j^n - S_{j-1}^n) \tag{3}$$

a qual é discretizada obtendo a equação de diferenças (4), considerada de forma conservativa:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( (S_j^n)^2 - (S_{j-1}^n)^2 \right) \tag{4}$$

O presente trabalho propõe resolver, através de métodos numéricos de passos simples, as equações (3) e (4), mantendo-se dados descritos no modelo [3] como o comprimento do rio igual a 5 centenas de  $km$  e a superfície inicial plana e sem ondas igual a 0,3 centenas de  $km^2$ . Além disso, as superfícies que supõem chuvas torrenciais por uma semana seguida da situação normal ( $S(x,0)$ ):

$$S_j^n = y_n = 0,3 + 0,1 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{7} t \right) \right) \quad (5)$$

$$S_j^{n+1} = y_{n+1} \quad (6)$$

O modelo teórico para previsão de inundação de um rio [3] propõe solução para as equações não-conservativa e conservativa através do Método de Burgers. Nesta solução o volume total é, por definição, a integral de  $S$  ao longo do rio. O cálculo aproximado do volume é realizado somando-se todos os  $S_j^i$ s vezes o  $\Delta x$  que é o espaçamento ou variação da posição conforme o número de pontos em que o rio é seccionado para efetuar o cálculo da área da secção transversal.

### III. ANÁLISE DA COMPLEXIDADE DOS MÉTODOS NUMÉRICOS E DE BURGERS

O termo complexidade, no contexto de algoritmos, refere-se aos requerimentos de recursos necessários para que um algoritmo possa resolver um problema sob o ponto de vista computacional, ou seja, à quantidade de trabalho despendido pelo algoritmo [6]. Quando o recurso é o tempo, são escolhidas uma ou mais operações fundamentais e então são contados os números de execuções desta operação fundamental na execução do algoritmo. Segundo Toscani [6] a escolha de uma operação como operação fundamental é aceitável se o número de operações executadas pelo algoritmo é proporcional ao número de execuções da operação fundamental.

A complexidade também pode ser vista como uma propriedade do problema, o que significa dar uma medida independente do tratamento dado ao problema, independente do caminho percorrido na busca da solução, portanto independente de algoritmos [7].

Sob um ponto de vista computacional, Garey e Johnson [8] descrevem informalmente um problema como uma questão genérica a ser respondida, geralmente possuindo vários parâmetros, ou variáveis livres.

Um problema é chamado de problema computável se existir um procedimento efetivo que o resolva em um número finito de passos, ou seja, se existe um algoritmo que leve à sua solução. Observa-se, contudo, que um problema considerado "em princípio" computável pode não ser tratável na prática, devido às limitações dos recursos computacionais para executar o algoritmo implementado [6].

Se existe um algoritmo de tempo polinomial que resolve todas as instâncias de um problema, este problema é tratável, caso contrário diz-se que é intratável [6].

Se a complexidade é tomada como a máxima para qualquer entrada de um dado "tamanho", a complexidade é chamada complexidade no pior caso ou simplesmente complexidade. Se, entretanto, é levada em conta a probabilidade de ocorrência de cada entrada de um mesmo "tamanho", a complexidade é chamada complexidade esperada ou complexidade média.

A análise de um algoritmo tem como objetivo melhorar, se possível, seu desempenho e escolher entre os algoritmos disponíveis o melhor. Existem vários critérios de avaliação de um algoritmo como: quantidade de trabalho requerido, quantidade de escopo requerido, simplicidade, exatidão de

resposta e otimalidade. É entretanto a complexidade no pior caso o critério de avaliação mais utilizado [6].

A quantidade de trabalho requerido por um algoritmo não pode ser descrita simplesmente por um número, porque o número de operações básicas efetuadas em geral não é a mesma para qualquer entrada, depende do tamanho da entrada. Mesmo para entradas do mesmo tamanho, o número de operações efetuadas pelo algoritmo pode depender de uma entrada particular. A expressão quantidade de trabalho requerido também é chamada complexidade do algoritmo [6].

Existem vários aspectos a considerar no cálculo da complexidade de tempo de um algoritmo. Um critério, pode ser medir o tempo de execução requerido por diferentes algoritmos, para a solução de um problema particular em um computador particular. Entretanto, uma medida empírica é fortemente dependente tanto do programa como da máquina usada para implementar o algoritmo. Assim, uma pequena mudança no programa pode não representar uma mudança significativa no algoritmo, mas apesar disso a velocidade de execução pode ser afetada. Além disso, se dois programas são comparados primeiro numa máquina, depois em outra, as comparações podem dar resultados diferentes. Então apesar da comparação de programas reais, rodando em computadores reais ser uma fonte de informação importante, os resultados são inevitavelmente afetados pela programação e as características de máquina. Uma alternativa útil é uma análise matemática das dificuldades intrínsecas da resolução do problema computacionalmente. E esta análise permite muitas vezes antecipar o cálculo da complexidade para a fase de projeto do algoritmo, afetando o resultado final.

No presente trabalho o foco é a análise da complexidade dos algoritmos dos métodos numéricos de passos simples - Euler, Runge-Kutta de  $2^a$ ,  $3^a$  e  $4^a$  ordens e do algoritmo proposto por Nachbin [3], elaborado para resolver as equações não-conservativa (3) e conservativa (4). Estas equações são resolvidas através do Método de Burgers, o que requer cálculo da matriz inversa, operação esta com elevado custo computacional.

#### A. Complexidade dos Métodos Numéricos e de Burgers

Como um dos objetivos do trabalho é aplicar métodos numéricos com baixa ordem de complexidade, para estimar o tempo de inundação de rios, analisa-se a complexidade de cada método numérico e do Método de Burgers, descrevendo as operações fundamentais e as ordens de complexidade.

O algoritmo do método de Euler está descrito em [9]. Já os algoritmos de Runge-Kutta de  $2^a$ ,  $3^a$  e  $4^a$  ordens encontram-se em [10].

**Método de Euler:** o algoritmo começa com uma entrada de 4 variáveis fixas ( $f, a, b, h$ ) e  $n$  que será o tamanho da entrada. Toma-se como operações fundamentais a atribuição ( $\rightarrow$ ) e a adição (+), logo a complexidade nessa linha é constante. Verifica-se que a o laço é executado  $n$  vezes, fazendo  $n$  atribuições.

Com isso, afirma-se que a complexidade do algoritmo do Método de Euler é de ordem linear,  $O(n)$ .

**Métodos de Runge-Kutta de 2ª, 3ª e 4ª ordens:** nesses algoritmos tomamos como operações fundamentais a atribuição ( $\rightarrow$ ), multiplicação ( $\times$ ), divisão ( $\div$ ) e a adição (+) e como tamanho da entrada o número de valores para k. Verificamos que eles executam n vezes o laço.

Sendo assim, verifica-se que a complexidade dos algoritmos para Runge-Kutta de 2ª, 3ª e 4ª ordens é de ordem linear,  $O(n)$ .

**Método de Burgers:** analisa-se a complexidade computacional dos algoritmos propostos por Nachbin [3] para solução das equações não-conservativa (chamado Método Não-conservativo) como para a conservativa (chamado Método Conservativo). Estas equações foram resolvidas pelo método de Burgers, o qual requer cálculo da matriz inversa.

O algoritmo começa com atribuições para as variáveis de inicialização e com algumas dessas variáveis é definido o tamanho da matriz (a partir do tamanho da entrada). Tomase como operações fundamentais a adição (+), multiplicação ( $\times$ ), subtração ( $-$ ) e comparação, e como tamanho da entrada o número n de tempos em dias e N o número de pontos a ser dividido o comprimento do rio, dados necessários e iniciais para calcular o volume do rio. Verifica-se duas comparações executadas  $it + 1$  vezes, onde  $it$  é o contador do primeiro laço de iteração. No laço de iteração interno tem-se complexidade  $O(n^r)$  (complexidade polinomial de ordem r) pois o tamanho do problema decresce de uma constante c, neste caso  $c = -1$  e  $t(n) = n - c$ , onde  $t(n)$  é o tamanho da entrada após a execução das operações fundamentais que antes da execução era n. Dessa forma, verifica-se que o algoritmo, tanto pelo Método não-conservativo como para o conservativo, tem  $O(n^{r+1})$ .

Tabela I  
COMPLEXIDADE DOS MÉTODOS NUMÉRICOS E DE BURGERS.

Método	Operações Fund.	Ordem de Complexidade
Euler	+, $\rightarrow$	$O(n)$
Runge-Kutta de 2ª ordem	+, $\rightarrow$ , $\times$ , $\div$	$O(n)$
Runge-Kutta de 3ª ordem	+, $\rightarrow$ , $\times$ , $\div$ , $-$	$O(n)$
Runge-Kutta de 4ª ordem	+, $\rightarrow$ , $\times$ , $\div$	$O(n)$
Burgers	+, $\times$ , $-$ , $<$	$O(n^{r+1})$

IV. MÉTODOS NUMÉRICOS

O modelo hidrológico de Nachbin [3] propõe solução da previsão do tempo de inundação através de Burgers. Propõe-se uma solução através de métodos numéricos, já que possuem uma complexidade menor do que a encontrada pela solução de Burgers. A seguir são apresentadas as equações que foram adaptadas aos métodos numéricos escolhidos pela sua complexidade linear. As equações (3) e (4) foram adaptadas aos dados iniciais do modelo em estudo, para cumprir a condição de  $S_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$  (método estável), tais como:  $\epsilon = 10^{-1}$ ,  $\Delta x = 1,25$ ,  $\Delta t = 1$  e  $L = 5$ , onde  $\epsilon$  é a precisão,  $\Delta x$  é a variação da posição,  $\Delta t$  é variação do tempo e  $L$  é o comprimento do rio em km. Juntamente com os dados iniciais nas soluções numéricas das equações (3) e (4), utilizam-se os métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta de 2ª, 3ª e 4ª ordens, para os quais propõem-se adotar as seguintes equações:

- Para a equação (3):

$$h = \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{7}$$

$$f(x_n, y_n) = -S_j^n (S_j^n - S_{j-1}^n) \tag{8}$$

- Para a equação (4):

$$h = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \tag{9}$$

$$f_{n+1} = (S_j^n)^2 \quad e \quad f_n = (S_{j-1}^n)^2 \tag{10}$$

Conforme os dados iniciais do modelo teórico adotado e as atribuições adaptadas em cada método numérico de Euler, Runge Kutta de 2ª, 3ª e 4ª ordens [5], calcula-se volume do rio em cada dia de chuva com o objetivo de verificar qual dia o rio transbordará. Na Tabela II encontram-se os volumes calculados para cada dia, considerando um intervalo de tempo de uma semana. Os volumes foram obtidos com a aplicação dos métodos de Euler e Runge-Kutta de 2ª, 3ª e 4ª ordens, comparados com a solução do método de Burgers, proposto por Nachbin [3].

Tabela II  
MÉTODOS APLICADOS NA EQUAÇÃO NÃO CONSERVATIVA.

Tempo em dias	Burgers	Euler	Runge-Kutta de 2ª ordem	Runge-Kutta de 3ª ordem	Runge-Kutta de 4ª ordem
	Volume Km³	Volume Km³	Volume Km³	Volume Km³	Volume Km³
1	1.506	1.675	1.683	1.686	1.708
2	1.533	2.075	2.083	2.118	2.118
3	1.595	2.417	2.418	2.454	2.466
4	1.763	2.450	2.436	2.438	2.497
5	1.761	2.139	2.123	2.086	2.179
6	1.760	1.716	1.715	1.665	1.748
7	1.734	1.511	1.519	1.487	1.540
8	1.673	1.675	1.683	1.686	1.708

Analisando a Tabela II, verifica-se que a inundação ocorrerá aproximadamente no quarto dia de chuva por apresentar ocorrência de maior volume neste dia, em todos os métodos numéricos, coincidindo com o resultado obtido pelo método de Burgers (proposto no modelo teórico adotado).

Com interesse na conservação da massa, após a inundação, calculam-se os valores de volume, obtidos a partir da aplicação dos métodos numéricos na equação (4), os quais são apresentados na Tabela III.

Tabela III  
MÉTODOS APLICADOS NA EQUAÇÃO CONSERVATIVA.

Tempo em dias	Burgers	Euler	Runge-Kutta de 2ª ordem	Runge-Kutta de 3ª ordem	Runge-Kutta de 4ª ordem
	Volume Km³	Volume Km³	Volume Km³	Volume Km³	Volume Km³
1	1.692	1.388	1.742	1.691	1.143
2	1.766	1.307	2.142	2.097	1.144
3	1.865	1.676	2.470	2.441	1.050
4	1.944	2.450	2.487	2.474	0.932
5	1.967	2.884	2.177	2.163	0.880
6	1.947	2.491	1.766	1.737	0.932
7	1.930	1.800	1.571	1.526	1.049
8	1.765	1.388	1.742	1.691	1.143

Pela Tabela III, verifica-se que o rio transbordará no quarto dia, se considerar os métodos de Runge-Kutta de 2ª e 3ª ordens e, se considerar os valores de volume pelo método de Euler, a inundação ocorrerá no quinto dia considerando que o método de Burgers também apresentou maior volume no quinto dia. Neste caso, estima-se que a inundação ocorrerá entre o quarto e quinto dia.

V. ERROS

Quando resolvemos problemas utilizando computação numérica, os resultados obtidos são em geral aproximados. Ressalta-se que nenhum resultado obtido através da aplicação de métodos numéricos tem valor se não for conhecido o controle sobre os possíveis erros envolvidos no processo. Assim, torna-se importante medir o quão próximo este resultado obtido, através de métodos numéricos, está do valor exato. Neste caso, o valor exato considerado é o volume calculado pelo método de Burgers (solução proposta pelo modelo teórico adotado).

A. Tipos de Erros

Nas aproximações entre um valor exato e sua aproximação, consideram-se duas formas de avaliar o erro cometido [5]:

- Erro Absoluto ( $EA_x$ ): diferença entre o valor exato de um número  $x$  e seu valor aproximado  $\bar{x}$ .

$$EA_x = |x - \bar{x}| \tag{11}$$

- Erro Relativo ( $ER_x$ ): razão entre o erro absoluto e o valor aproximado  $\bar{x}$ .

$$ER_x = \frac{|EA_x|}{\bar{x}} \tag{12}$$

B. Erros Calculados

No presente trabalho, considera-se como valor exato  $x$  o valor obtido da aplicação do Método de Burgers (método sugerido no modelo adotado [3]), e para o valor aproximado  $\bar{x}$  o resultado proveniente da aplicação dos métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta de 2ª, 3ª e 4ª ordens. Com os valores obtidos da aplicação dos métodos numéricos, calcula-se o erro absoluto (EA) e o erro relativo (ER) para cada método aplicado, com exatidão  $\epsilon = 10^{-1}$ .

A Tabela IV apresenta os erros Absoluto e Relativo calculados para os volumes (Tabela II) obtidos através da solução da equação não-conservativa para cada dia, considerando o período de uma semana seguida de chuvas torrenciais.

Tabela IV

ERRO DOS MÉTODOS APLICADOS NA EQUAÇÃO NÃO-CONSERVATIVA.

Tempo em dias	Euler		Runge-Kutta de 2ª ordem		Runge-Kutta de 3ª ordem		Runge-Kutta de 4ª ordem	
	EA	ER	EA	ER	EA	ER	EA	ER
1	0.169	0.100	0.177	0.105	0.180	0.106	0.202	0.118
2	0.542	0.261	0.550	0.264	0.585	0.276	0.585	0.276
3	0.822	0.340	0.823	0.340	0.859	0.350	0.871	0.353
4	0.687	0.280	0.673	0.276	0.675	0.276	0.734	0.293
5	0.378	0.176	0.362	0.170	0.325	0.155	0.418	0.191
6	0.044	0.025	0.045	0.026	0.095	0.057	0.012	0.006
7	0.223	0.147	0.215	0.141	0.247	0.166	0.194	0.125
8	0.002	0.001	0.010	0.005	0.013	0.007	0.035	0.020

Na Tabela V encontram-se os erros Absoluto e Relativo calculados a partir dos volumes descritos na Tabela III, obtidos através da solução da equação conservativa, considerando o mesmo período de uma semana seguida de chuvas torrenciais.

Tabela V

ERRO DOS MÉTODOS APLICADOS NA EQUAÇÃO CONSERVATIVA.

Tempo em dias	Euler		Runge-Kutta de 2ª ordem		Runge-Kutta de 3ª ordem		Runge-Kutta de 4ª ordem	
	EA	ER	EA	ER	EA	ER	EA	ER
1	0.304	0.219	0.050	0.028	0.001	0.000	0.549	0.480
2	0.459	0.351	0.376	0.175	0.331	0.157	0.622	0.543
3	0.189	0.112	0.605	0.244	0.576	0.235	0.815	0.776
4	0.506	0.206	0.543	0.218	0.530	0.214	1.012	1.085
5	0.917	0.317	0.210	0.096	0.196	0.090	1.087	1.235
6	0.544	0.218	0.181	0.102	0.210	0.120	1.015	1.089
7	0.130	0.072	0.359	0.228	0.404	0.264	0.881	0.839
8	0.377	0.271	0.023	0.013	0.074	0.043	0.622	0.544

De acordo com os volumes obtidos, presentes nas Tabelas II e III a respeito da previsão do dia de inundação, e os erros calculados nas Tabelas IV e V, verifica-se que para a equação não-conservativa, a qual estima a inundação no quarto dia, o método de Runge-Kutta de 2ª ordem apresenta-se mais estável, gerando uma melhor precisão do volume em comparação. Para a equação conservativa, onde no quinto dia ocorrerá a inundação se considerar o método de Euler (comparado com a solução de Burgers), e quarto dia nos demais métodos numéricos, verifica-se que o método de Euler gerou valores para o volume com boa precisão, apesar dos demais métodos apresentarem erros absoluto e relativo menores.

Importante ressaltar que o foco do presente trabalho é estimar o dia de inundação de um rio com precipitação intensa de chuva no decorrer de uma semana através de métodos numéricos que possuem complexidade computacional reduzida que o Método de Burgers, além de considerar um modelo simples, o qual despreza algumas características que podem influenciar no processo de precipitação-vazão, neste caso, o método de Euler para a solução da equação conservativa retornou o maior volume de água no quinto dia de chuvas.

VI. APLICAÇÃO EM UM ARROIO DO RS

Definidos os métodos e estes implementados no software de computação numérica Scilab [12], escolheu-se um arroio do sul do Rio Grande do Sul como estudo de caso para estimar, com o referido modelo computacional, o dia que o rio transbordará considerando eventos de chuva de grande magnitude ocorridos durante uma semana.

O Arroio Fragata, considerando a estação de monitoramento fluviométrico na seção de controle Passo dos Carros (Pelotas/RS), possui à montante 17 km de comprimento de extensão e 126,8 km² de área de drenagem. Este arroio foi escolhido por estar em uma região de interesse para este estudo e por contar com monitoramento fluviométrico diário de responsabilidade da Agência Nacional de Águas (ANA). Para certificar que a estimativa temporal está correta, os volumes calculados com os dados reais foram comparados aos volumes calculados a partir das vazões deste rio no período compreendido entre os dias 10/09/2010 e 17/09/2010, disponível no Sistema de

Informações Hidrológicas - HidroWeb [11]. Salienta-se que a comparação leva em consideração o dia que possui o valor máximo de volume.

A Tabela VI apresenta os valores do volume do Arroio Fragata, considerando as equações não-conservativa (resolvida pelo método de Runge-Kutta de 2ª ordem) e conservativa (pelo método de Euler).

Tabela VI  
DADOS DO ARROIO FRAGATA APLICADOS NOS MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE 2ª ORDEM (NÃO-CONSERVATIVO) E NO MÉTODO DE EULER (CONSERVATIVO).

Tempo em dias	Não Conservativo	Conservativo
	Volume Km <sup>3</sup>	Volume Km <sup>3</sup>
1	1.43196	1.21819
2	1.76831	1.21396
3	2.05231	1.52389
4	2.07018	2.08291
5	1.80828	2.35359
6	1.46382	2.01562
7	1.29638	1.49182
8	1.43196	1.21819

Com os resultados dos volumes, verifica-se que o arroio irá transbordar no quinto dia, considerando chuvas torrenciais por uma semana.

A seguir, na Figura 3 apresenta-se a simulação da previsão de inundação do Arroio Fragata considerando uma semana de chuvas torrenciais.

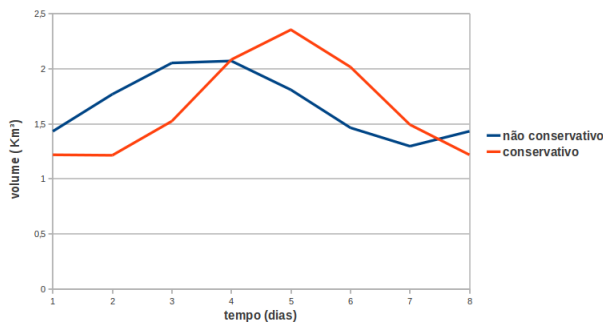


Figura 3. Gráfico previsão de inundação do Arroio Fragata.

Observa-se que as duas soluções (conservativa e não-conservativa) são muito semelhantes. De fato, elas são indistinguíveis a menos dos saltos hidráulicos. O salto hidráulico, pelo algoritmo do método conservativo, propaga mais rápido do que pelo método não-conservativo. O único efeito em usar o método na forma conservativa foi consertar a posição do salto hidráulico. Mas isso faz toda a diferença do mundo: um salto propagando mais rápido tem mais água atrás dele; é essa água que estamos perdendo no primeiro experimento com o método não-conservativo. Do ponto de vista prático a previsão da posição do salto é a mais importante do modelo, pois é isso que indica quando a onda de enchente atingirá cada cidade ribeirinha. Sabe-se que deseja-se e deve-se fazer a melhor previsão possível e por isso é necessário escolher esquemas numéricos que estão na forma conservativa. A velocidade do salto é determinada pela Lei de conservação. Se movermos

a descontinuidade (salto) com a velocidade errada, água será criada ou perdida pelo modelo numérico [3].

Para certificar que a estimativa temporal está correta, os volumes calculados com os dados reais foram comparados aos volumes calculados a partir das vazões deste rio, disponível no Sistema de Informações Hidrológicas - HidroWeb [11].

Salienta-se que a comparação leva em consideração o dia que possui o valor máximo de volume.

A Tabela VII apresenta o volume em diferentes trechos do Arroio Fragata ao longo de uma semana, dados reais utilizados para comparar e certificar a estimativa temporal de inundação do Arroio Fragata.

Tabela VII  
VOLUME (m<sup>3</sup>) NOS TRECHOS INICIAL E FINAL DO ARROIO FRAGATA AO LONGO DE UMA SEMANA.

Tempo em dias	Volume trecho inicial m <sup>3</sup>	Volume trecho final m <sup>3</sup>
10/09/2010	756,17	95988,90
11/09/2010	2024,86	257035,98
12/09/2010	4458,10	565911,14
13/09/2010	12186,60	1546967,78
14/09/2010	13292,61	1687365,58
15/09/2010	4599,33	583838,86
16/09/2010	3117,26	395705,80
17/09/2010	2225,64	282523,58

Verifica-se na análise da Tabela VII que o Arroio Fragata transbordou no quinto dia, considerando uma semana de chuvas torrenciais, estimativa temporal de acordo com os resultados obtidos da aplicação dos métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem para a equação não-conservativa e o método de Euler para a equação conservativa.

## VII. CONCLUSÃO

Como o fenômeno das inundações tem ocorrido com muita frequência em algumas localidades do Sul do RS e provocado desastres enormes para a população, o desenvolvimento desse trabalho se deve ao esforço de tentar diminuir esses estragos, através de previsões rápidas e simples a respeito do dia que ocorrerá a inundação de rio e assim, avisar a defesa civil sobre a possível inundação de um local. Os modelos de previsões de inundações em rios existentes na literatura são poucos e complexos, exigem operações demoradas e, por isso, acabam por exigir um alto custo computacional. Dessa forma, através da aplicação e utilização de métodos numéricos de passos simples para previsão de inundações de rios, os cálculos tornam-se mais simples e com menor custo computacional.

Neste trabalho adota-se um modelo teórico matemático que possibilita adequar informações físicas de um determinado rio. Este modelo tem sua solução pelo método de Burgers, o qual possui custo computacional elevado. Preocupados no tempo de processamento de tais cálculos, explora-se a solução deste modelo com métodos numéricos de passos simples: Euler e Runge-Kutta de 2ª, 3ª e 4ª ordens.

Métodos numéricos de Passos Simples tornam o modelo teórico matemático adotado mais simples computacionalmente, ou seja, a previsão de inundação em rios pode ser realizada com complexidade computacional de ordem linear,

ou seja, baixo custo computacional. Através da aplicação de dados reais obteve-se certificação de que a estimativa temporal resultante do modelo computacional estudado está correta, ou seja, o rio transbordará no quinto dia, resultado obtido coincide com o volume calculado a partir de informações fornecidas pela Agência Nacional de Águas.

Como trabalhos futuros pretende-se construir um modelo gráfico para visualizar as simulações de inundações, agregando características físicas das áreas que podem ser inundadas.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fapergs pelo suporte financeiro na realização do presente trabalho.

#### REFERÊNCIAS

- [1] J. B. L. Silva, Modelos de previsão de enchentes em tempo real para o município de Nova Era - MG. Master's thesis, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2006.
- [2] M. S. P. Meirelles et al., Geomática: modelos e aplicações ambientais, Brasília DF. *Embrapa Informação Tecnológica*, 2007.
- [3] A. Nachbin and E. Tabak, 21<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática: equações diferenciais em modelagem matemática computacional. IMPA, Rio de Janeiro, 1997.
- [4] C. E. M. Tucci, *Modelos Hidrológicos*. Editora da UFRGS, Porto Alegre, 2 edition, 2005.
- [5] M. A. G. Ruggiero and V. L. Da Rocha, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Pearson Makron Books, São Paulo, 2 edition, 1996.
- [6] L. V. Toscani and P. A. Veloso, Complexidade de Algoritmos: análise, projetos e métodos. Sagra-Luzzato, Porto Alegre, Instituto de Informática da UFRGS, 2001.
- [7] A. Loreto et al., Complexidade Computacional de Problemas de Estatística Descritiva com Entradas Intervalares. *CLEI.....*, 2010.
- [8] M. E. Garey and D. S. Johnson, Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. Freeman, San Francisco, 1979.
- [9] D. M. Cláudio and J. M. Marins, *Cálculo numérico Computacional: teoria e prática*. Atlas, São Paulo, 3 edition, 2000.
- [10] Instituto de Ciências Exatas e da Terra - Universidade Federal de Mato Grosso. Acessado em: 12 de junho de 2011. Disponível em: <<http://www.ufmt.br/icet/matematica/geraldo/>>.
- [11] Agência Nacional de Águas - ANA, sistema de Informações Hidrológicas - HydroWeb. Acessado em: 12 de abril de 2011. Disponível em: <<http://hidroweb.ana.gov.br/>>.
- [12] Free Open Source Software for Numerical Computation - Scilab. Acessado em: 10 de agosto de 2010. Disponível em: <<http://www.scilab.org/>>.