

Uma Estratégia Híbrida para o Problema de Empacotamento

Rosana dos Santos, Leonardo Ramos Emmendorfer

Resumo - Problemas de corte e empacotamento têm inúmeras instâncias industriais e vêm sendo objeto de estudo desde os anos 50, onde diversos autores já apresentavam modelos teóricos e métodos de solução, ressaltando o potencial técnico e econômico de suas aplicações práticas. Em tais problemas a ideia básica é de otimizar uma determinada função objetivo, como a de minimizar perdas, custos, desperdícios de espaço e outros. É importante ressaltar que no presente artigo apresenta-se uma metodologia analítica que visa solucionar o problema de empacotamento de duas elipses, idênticas ou não, não sobrepostas e tangentes num único ponto, dentro de uma região retangular onde avaliou-se a área mínima ocupada por tais elipses dentro desta região.

Palavras-chaves - Problemas de corte e empacotamento, empacotamento de elipses, empacotamento.

I. INTRODUÇÃO

A grande variedade de problemas que estão estreitamente relacionados com os problemas de corte e empacotamento tem ocasionado o aumento do interesse por este assunto por diversos estudiosos. Alguns exemplos de problemas deste tipo observados no cotidiano são os problemas de carregamento de veículos, alocação de tarefas ou memória computacional, balanceamento de linha de montagem, orçamento de capital e demais.

O problema de corte consiste em cortar unidades de peças maiores para a produção de unidades de itens menores, com quantidades e tamanhos específicos, de maneira a otimizar uma determinada função objetivo, como por exemplo, a de minimizar perdas, custos e o total de objetos a serem cortados, visando maximizar lucros de produção, como cita Arenales, (2003) em [2]. Tais problemas têm inúmeras instâncias industriais, como em indústrias de papel, papelão, móveis, vidros, plásticos, calçados, roupas, barras e placas de metal, alumínio, aço e madeira, chapas de vidro, peças de couro, entre outras. Exemplos práticos de problemas similares ao do

corte em sua formulação e resolução são os problemas de empacotamento, o qual consiste em determinar a melhor forma de arranjar um conjunto de itens dentro de objetos, como por exemplo, alocar caixas (itens) dentro de contêineres de caminhões, navios e vagões de trens (objeto).

De acordo com Arenales (2003) em [2], dependendo da natureza dos objetos/itens e dos tipos (barra, placas, caixas, circunferências, esferas, dentre outros) a serem cortados ou empacotados, temos os chamados problemas de corte e empacotamento (PCE) unidimensional, bidimensional, tridimensional. No caso do problema unidimensional, apenas uma dimensão (comprimento) do objeto é levada em consideração no processo, como no caso de barras de ferro. Este tipo de problema aparece muito em indústrias de papel, papelão, canos, estruturas de metal, aço, esquadrias, entre outras. Em problemas bidimensionais, duas dimensões (comprimento e largura) do objeto são consideradas relevantes, e podem ser vistos em indústrias de móveis, metalúrgicas, esquadrias de alumínio e outros. Por fim, o problema é tridimensional quando três dimensões (comprimento, altura e largura) do objeto são consideradas. Tal problema ocorre em indústrias de colchões e travesseiros, bem como em transportes de produtos e cargas, onde vários produtos como vidros, pisos e azulejos devem ser encaixotados para serem transportados em furgões de dimensões fixas visando minimizar o número de viagens de um lugar para outro.

Neste trabalho, será apresentada uma metodologia analítica para solucionar o problema de empacotamento de duas elipses em uma região retangular, tais que estas não estejam sobrepostas, além disso, será apresentada uma avaliação da área ocupada pelas mesmas nesta região. Na próxima seção (seção II) apresenta-se uma revisão bibliográfica de alguns trabalhos desenvolvidos sobre problemas de corte e empacotamento, em seguida, o objetivo e a justificativa (seção III) de tal pesquisa, bem como a metodologia utilizada (seção IV), resultados esperados e propostas futuras de trabalhos (seção V).

II. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A grande importância operacional e econômica do problema de corte e a sua dificuldade de resolução têm despertado interesse de pesquisadores nesta área desde os anos 50, onde diversos autores já apresentavam modelos teóricos e métodos de solução, ressaltando o potencial técnico e econômico de suas aplicações práticas. Nos problemas de empacotamento o principal objetivo consiste em maximizar a proporção entre o volume dos itens a serem empacotados e o volume total do objeto onde os itens serão colocados. Os casos específicos que

Rosana dos Santos é graduada em licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Pelotas (UFPe) e mestranda em Modelagem Computacional na Universidade Federal do Rio Grande (FURG). profrosanasantos@gmail.com.

Leonardo Ramos Emmendorfer é Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), possui mestrado em Modelagem Matemática pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUI). Atualmente atua como Professor e Coordenador do curso de mestrado em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande (FURG). leonardo.emmendorfer@gmail.com.

se desdobram da ideia básica de empacotamento estão ligados a importantes problemas de natureza prática, como problemas nas áreas de matemática aplicada, física, biologia, engenharia e outras.

Os PCEs vêm sendo estudados há décadas e um dos trabalhos de maior repercussão foi o dos pesquisadores Gilmore e Gomory (1961) em [10], que apresentaram o método simplex com geração de colunas para um modelo de otimização linear, ou seja, uma aproximação para o problema, que resolveu pela primeira vez problemas reais de corte de estoque unidimensional.

Em problemas de engenharia, administração, logística, transporte, entre outros, são utilizadas técnicas matemáticas de otimização para maximizar ou minimizar uma função previamente definida como índice de desempenho e performance, visando encontrar uma solução ótima do problema, ou seja, a qual resulte no melhor desempenho possível do sistema, segundo o critério de desempenho previamente definido. Para Dyckhoff e Finke (1992) em [8], problemas de corte e empacotamento são, em geral, problemas de otimização combinatória que buscam determinar o arranjo ótimo de unidades menores (itens) dentro de unidades maiores (objetos) satisfazendo a determinadas restrições, ou seja, alocar uma coleção de itens com tamanhos definidos no menor número de compartimentos possível. A capacidade do compartimento é previamente definida, de forma que nenhum destes seja preenchido além de sua capacidade, assim como nenhum objeto seja fracionado em objetos menores.

A. Trabalhos relacionados a empacotamento

Muitos são os trabalhos encontrados na literatura que apresentam problemas de empacotamento, como por exemplo, empacotamento de esferas/círculos, retângulos, partículas, granulados, entre outros. Neste artigo são revisados alguns trabalhos relacionados a empacotamento de esferas e círculos, como por exemplo o trabalho recente de Birgin (2005, 2008) em [1] e [3], que lidou com o problema de empacotar itens retangulares e não retangulares (quadrado, círculo, triângulo equilátero, elipse, retângulo, etc.) dentro de objetos retangulares e não retangulares, utilizando heurísticas baseadas em subproblemas de programação não linear, no qual a resolução destes subproblemas correspondia a responder a pergunta de se um determinado subconjunto dos itens que devem ser empacotados poderiam ou não serem empacotados no objeto.

Em problemas de empacotamento de objetos circulares/esféricos, a ideia básica geralmente é arranjar círculos/esferas no interior de uma região limitada de forma que não haja sobreposição dos círculos/esferas nesta região. Um exemplo prático é o caso do problema de empilhamento de laranjas, o qual sempre interessou os produtores, na busca de encontrar a forma mais compacta de empilhá-las para economizar engradados.

Paula Junior (2010) em [14] destaca um exemplo de empacotamento de q de esferas idênticas dentro de um cubo C em \mathbb{R}^3 , onde a intenção era alocar as q esferas dentro do cubo, sem sobrepô-las, maximizando seu raio. Equivalentemente, desejou-se maximizar a mínima distância entre pares de q

esferas dentro do cubo. A Figura 1 representa o problema em questão para o caso de $q = 20$.

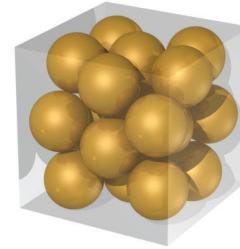


Figura 1: Empacotamento de esferas em um cubo. Fonte: Paula Junior, 2010.

Altimari (2005) em [1] tratou do problema de empacotar círculos de diferentes raios em um determinado retângulo como um problema de programação linear, no qual os algoritmos visavam resolver o problema de como encaixar da melhor maneira possível um dado número de círculos dentro de um dado retângulo. A partir de uma ordenação de peças, a intenção era que cada peça fosse colocada na posição mais alta à esquerda possível dentre um conjunto finito de opções, obtido em relação às peças já colocadas, excluindo-se as repetições e sobreposições. Na Figura 2 ilustra-se um exemplo, no qual se supôs uma ordenação inicial $P1$, colocada no canto superior esquerdo, e após verificou-se as possíveis posições que $P2$ poderia ocupar de forma ótima.

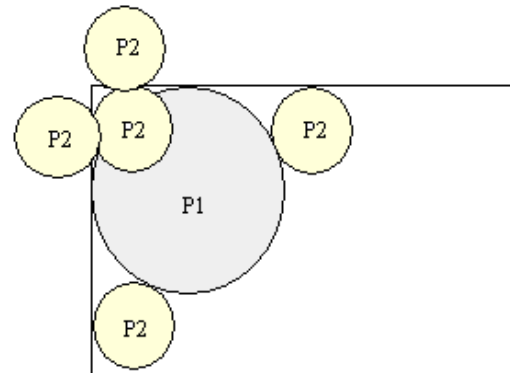


Figura 2: Exemplo de empacotamento de círculos.

O empacotamento de partículas também vem sendo muito estudado nos últimos anos em diferentes áreas da engenharia, devido ao fato de que grande parte dos materiais naturais ou industriais com os quais lida-se diariamente são ou contém partículas de diferentes formas e tamanhos, como os grãos de agregados, minerais, metais, solos, moléculas, poros ou rochas, entre outros. Segundo Castro (2009) em [4], o estudo do empacotamento de partículas pode ser definido como o problema da correta seleção da proporção e do tamanho adequado dos materiais particulados, de forma que os vazios maiores sejam preenchidos por partículas menores, cujos vazios serão novamente preenchidos com partículas ainda menores e assim sucessivamente. Na Figura 3 tem-se um exemplo de empacotamento de círculos, com máxima densidade, e na Figura 4 tem-se o empacotamento de círculos com deficiência de partículas.

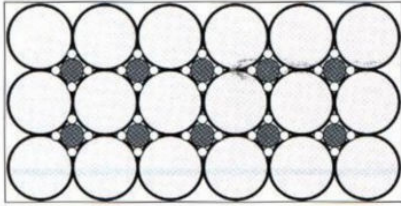


Figura 3. Fonte: Castro, 2009.

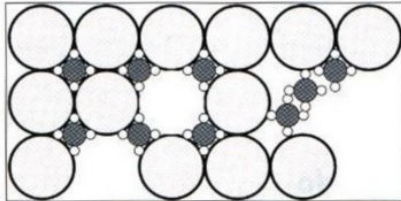


Figura 4. Fonte: Castro, 2009.

B. Métodos e algoritmos para solucionar problemas de empacotamento

Muitos são os métodos e algoritmos utilizados para solucionar PCE, e uma técnica muito utilizada para solucionar tais problemas é a de algoritmos gulosos, os quais seguem a resolução de problemas heurísticos de fazer a melhor escolha localmente em cada fase, com a esperança de encontrar um resultado ótimo, ou seja, faz-se o que parece ser a melhor escolha no momento e em seguida, resolvem-se os subproblemas que surgem mais tarde. Tal algoritmo nunca reconsidera as escolhas feitas e por ser geralmente um algoritmo fácil de implementar, ele nem sempre conduzirá a soluções ótimas, como cita Cherri (2009) em [6].

Um exemplo de heurística gulosa é abordado por Cherri (2009) em [6] em seu trabalho sobre problemas de corte de estoque com sobras de materiais aproveitáveis, no qual fez uso de uma heurística para obter um padrão de corte e após, a sobra/perda era analisada para verificar se estava dentro dos limites aceitáveis definidos previamente para o próximo padrão de corte. O processo só encerra-se quando se obtém uma sobra aceitável ou o padrão de corte anulado.

Além do algoritmo guloso, vem sendo adotado também o uso dos algoritmos genéticos (AG), os quais tem se destacado nas publicações mais recentes sobre PCE, na busca por soluções aproximadas. De acordo com Goldberg (1989) em [11], os AGs constituem uma técnica de busca e otimização inspirada nos mecanismos de evolução de seres vivos, ou seja, algoritmos que seguem o princípio da seleção natural e sobrevivência do mais apto. As técnicas de busca e otimização geralmente apresentam um espaço de busca, onde estão todas as possíveis soluções do problema e uma função objetivo para avaliar as soluções produzidas (Constantino, 2002) em [7].

Segundo Johnson (1979) em [13], os PCEs em geral, são problemas combinatórios NP-difíceis e, portanto, para se determinar uma solução com garantia de otimalidade, normalmente é exigido um grande esforço computacional, o que na prática, até então não se apresentou um algoritmo eficiente que os resolva. De acordo com Goodrich e Tamassia (2002) em [12], um dos métodos mais efetivos para solucionar problemas deste tipo é a construção de algoritmos de

aproximação, os quais servem para encontrar pelo menos uma solução aproximada de um dado problema.

III. OBJETIVO E JUSTIFICATIVA

O objetivo principal deste trabalho é de apresentar uma nova metodologia analítica que solucione o problema de empacotamento de duas elipses, idênticas ou não e sem sobreposição dentro de uma região retangular, de modo que a área ocupada pelas mesmas dentro dessa região seja a mínima. Além disso, serão apresentadas algumas implementações da metodologia proposta.

Parte da motivação para a presente pesquisa deve-se a importância tecnológica e econômica de suas aplicações práticas, além disso, devido à ausência de técnicas para resolução de problemas de empacotamento de elipses, já que há uma diversidade de métodos existentes para resolver problemas de empacotamento de retângulos, quadrados, esferas, círculos, entre outros. Em vista disso, desenvolveu-se tal metodologia, para que esta sirva de fundamentação para estudos futuros de outros estudiosos interessados nesta mesma área de pesquisa.

IV. METODOLOGIA

A título de ilustração da metodologia proposta, desenvolveu-se inicialmente uma heurística, no qual avaliou-se o problema de empacotamento de uma elipse e um círculo, tal que o círculo rotacionasse em torno de uma elipse fixa, em seguida, determinou-se a equação que descreve a área de um retângulo mínimo que continha inscrito os mesmos não sobrepostos e tangentes em um único ponto P (Figura 5). De maneira similar, determinou-se a equação que descreve a área do retângulo mínimo que continha inscrito duas elipses, não sobrepostas e tangentes em um único ponto P (Figura 6).

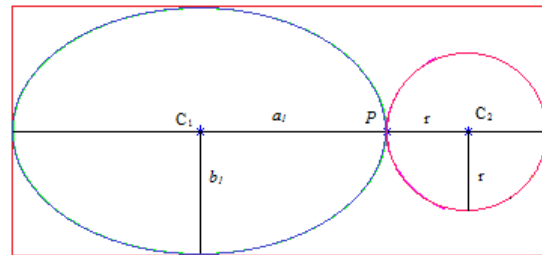


Figura 5: Retângulo mínimo formado pela tangencia de uma elipse e um círculo.

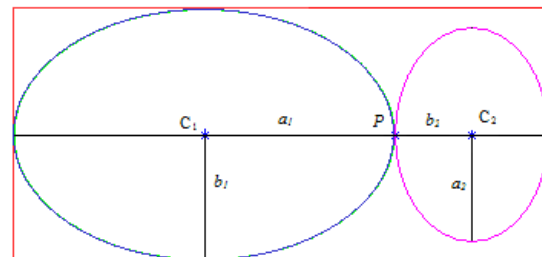


Figura 6: Retângulo mínimo formado pela tangencia de duas elipses.

A seguir, são descritos os procedimentos utilizados para o desenvolvimento das metodologias descritas anteriormente.

A: Caso 1 - Empacotamento de uma elipse e um círculo

i. Considerar as equações paramétricas da elipse, de semi-eixos maior e menor iguais respectivamente, a_1 e b_1 e com centro em $C_1 = (xc_1, yc_1)$, $\alpha_1 \in [0, 2\pi]$ e $\tau \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = xc_1 + a_1 \cos(\tau) \cos(\alpha_1) - b_1 \sin(\tau) \sin(\alpha_1) \\ y_1(\tau) = yc_1 + a_1 \cos(\tau) \sin(\alpha_1) + b_1 \sin(\tau) \cos(\alpha_1) \end{cases}$$

onde α_1 é o ângulo de inclinação do eixo maior da elipse em relação ao eixo Ox e o parâmetro τ descreve todos os pontos pertencentes a elipse;

ii. Considerar as equações paramétricas do círculo de raio r e centro em $C_2 = (xc_2, yc_2)$:

$$\begin{cases} x_2(\tau) = xc_2 + r \cos(\tau) \\ y_2(\tau) = yc_2 + r \sin(\tau) \end{cases}, \tau \in [0, 2\pi].$$

iii. Fixar a elipse no centro $C_1 = (0,0)$ e considerar $\alpha_1 = 0$, logo:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = a_1 \cos(\tau) \\ y_1(\tau) = b_1 \sin(\tau) \end{cases}, \tau \in [0, 2\pi].$$

iv. Considerar φ_1 , tal que φ_1 defina um ponto $P = (x_p, y_p)$ da elipse, logo:

$$\begin{cases} x_p = a_1 \cos(\varphi_1) \\ y_p = b_1 \sin(\varphi_1) \end{cases}, \varphi_1 \in [0, 2\pi].$$

v. Calcular o centro C_2 do círculo de raio r a partir do ponto P em função de φ_1 e da equação da reta ortogonal a reta tangente em P , com base no esboço da Figura 7;

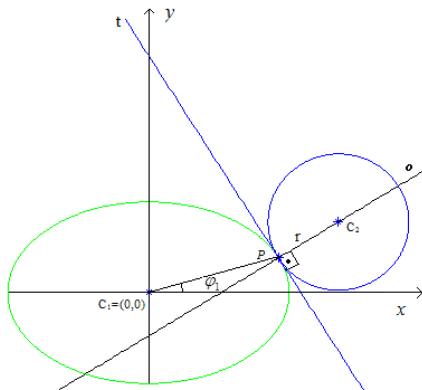


Figura 7: Determinação do ponto de tangência da elipse e do círculo.

vi. Determinar a equação da reta t , tal que t seja a reta tangente à elipse em P , a partir da derivada das equações paramétricas da elipse em P . Logo, considera-se como sendo m a inclinação da reta tangente a elipse no ponto P , então:

$$m = \frac{dy}{dx} = -\frac{b_1 \cos(\varphi_1)}{a_1 \sin(\varphi_1)},$$

e deste modo, a reta t será descrita pela equação:

$$y = m(x - x_p) + y_p.$$

vii. Determinar a equação que descreve a reta o , tal que o seja a reta ortogonal a reta t em P , tendo em vista que a inclinação da reta o em P é igual a $-\frac{1}{m}$, então:

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_p) + y_p.$$

viii. Sendo a distância dos pontos C_2 e P obtida a partir da equação $d(C_2, P) = \sqrt{(xc_2 - x_p)^2 + (yc_2 - y_p)^2} = r$, segue que:

$$yc_2 = \pm \sqrt{r^2 - (xc_2 - x_p)^2} + y_p \quad (1).$$

Pela Figura 7, nota-se que o centro C_2 do círculo pertence à reta o , deste modo, como a reta o é descrita pela equação $y = -\frac{1}{m}(x - x_p) + y_p$, então:

$$yc_2 = \left(-\frac{1}{m}\right)(xc_2 - x_p) + y_p \quad (2).$$

Iguala-se as equações 1 e 2 e obtém-se xc_2 do ponto C_2 :

$$xc_2 = \pm \frac{r}{\sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2 + 1}} + x_p.$$

ix. Determinado o centro C_2 do círculo será possível gerar o mesmo, tangente à elipse no ponto P , a partir de suas equações paramétricas.

Resultados gráficos foram obtidos com o auxílio do *software* Matlab, o qual é um *software* interativo voltado para o cálculo numérico, como pode ser observado nos gráficos abaixo (Figuras 8 e 9), nos quais foram considerados a elipse de centro $C_1 = (0,0)$, $\alpha_1 = 0$ e de semi-eixos iguais a 6 e 4, e o círculo de raio igual a 4.

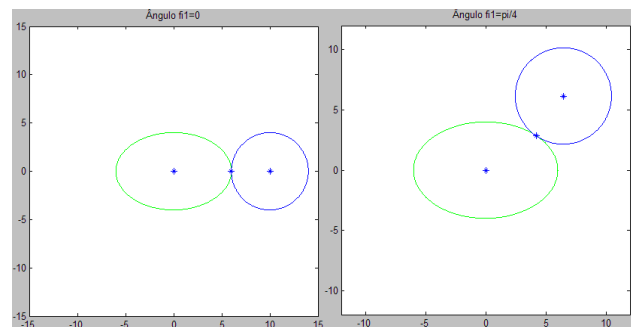


Figura 8 e Figura 9

B: Caso 2 - Empacotamento de duas elipses

i. Considerar as equações paramétricas da primeira elipse de semi-eixos maior e menor iguais respectivamente, a_1 e

b_1 , com centro $C_1 = (x_{c_1}, y_{c_1})$, $\tau \in [0, 2\pi]$ e $\alpha_1 \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = x_{c_1} + a_1 \cos(\tau) \cos(\alpha_1) - b_1 \sin(\tau) \sin(\alpha_1) \\ y_1(\tau) = y_{c_1} + a_1 \cos(\tau) \sin(\alpha_1) + b_1 \sin(\tau) \cos(\alpha_1) \end{cases}$$

onde α_1 é o ângulo de inclinação do eixo maior da elipse em relação ao eixo Ox e o parâmetro τ descreve todos os pontos pertencentes a elipse;

ii. Considerar as equações paramétricas da segunda elipse de semi-eixos maior e menor iguais respectivamente a a_2 e b_2 , onde $C_2 = (x_{c_2}, y_{c_2})$, $\alpha_2 \in [0, 2\pi]$ e $\tau \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} x_2(\tau) = x_{c_2} + a_2 \cos(\tau) \cos(\alpha_2) - b_2 \sin(\tau) \sin(\alpha_2) \\ y_2(\tau) = y_{c_2} + a_2 \cos(\tau) \sin(\alpha_2) + b_2 \sin(\tau) \cos(\alpha_2) \end{cases}$$

iii. Fixar a primeira elipse em $C_1 = (0,0)$ e considerar $\alpha_1 = 0$, logo:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = a_1 \cos(\tau) \\ y_1(\tau) = b_1 \sin(\tau) \end{cases}, \tau \in [0, 2\pi].$$

iv. Considerar φ_1 , tal que φ_1 define um ponto $P = (x_p, y_p)$ da primeira elipse, logo:

$$\begin{cases} x_p = a_1 \cos(\varphi_1) \\ y_p = b_1 \sin(\varphi_1) \end{cases}, \varphi_1 \in [0, 2\pi].$$

v. Determinar a equação que descreve a reta t tangente à primeira elipse dada, no ponto P , bem como a reta o , ortogonal a reta t em P . Similarmente ao caso 1, a reta t será descrita pela equação $y = m(x - x_p) + y_p$ e a reta o

será descrita pela equação $y = -\frac{1}{m}(x - x_p) + y_p$;

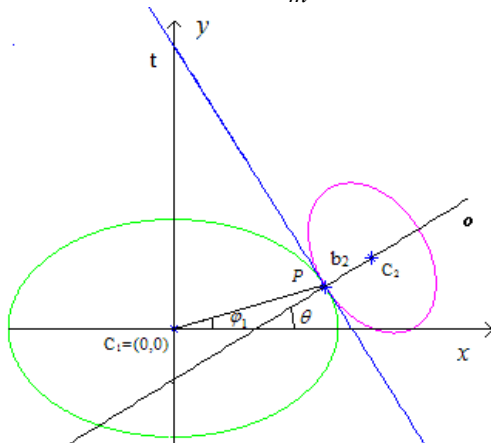


Figura 10: Determinação do ponto de tangência das elipses.

vi. Com base na Figura 10, determina-se o ângulo α_2 , sendo α_2 o ângulo de inclinação do eixo maior da segunda elipse em relação a Ox , tendo em vista que a inclinação

da reta ortogonal é $-\frac{1}{m}$ e que $\theta = \arctg\left(-\frac{1}{m}\right)$, então

$$\alpha_2 = \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right);$$

vii. Sendo $d(C_2, P) = \sqrt{(x_{c_2} - x_p)^2 + (y_{c_2} - y_p)^2} = b_2$, então:

$$y_{c_2} = \pm \sqrt{b_2^2 - (x_{c_2} - x_p)^2} + y_p \quad (3).$$

Pela Figura 10 nota-se que o centro C_2 da segunda elipse pertence à reta o , logo, como a reta o é descrita pela equação

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_p) + y_p, \text{ então:}$$

$$y_{c_2} = \left(-\frac{1}{m}\right)(x_{c_2} - x_p) + y_p \quad (4).$$

Iguala-se as equações 3 e 4 e obtém-se x_{c_2} do ponto C_2 :

$$x_{c_2} = \pm \frac{b_2}{\sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2 + 1}} + x_p.$$

viii. Determinado o centro C_2 da segunda elipse será possível gerar o gráfico da mesma, tangente no ponto P , a partir de suas equações paramétricas e do ângulo α_2 .

Assim no caso 1, realizou-se algumas implementações para o caso 2 no *software* Matlab nos quais também notou-se bons resultados. Deste modo, o próximo passo neste trabalho, será determinar a equação que descreve a área de um retângulo mínimo que contenha inscrito a elipse o círculo, bem como as duas elipses tangentes em um ponto P .

V. RESULTADOS OBTIDOS

A partir das implementações dos procedimentos citados anteriormente, para ambos os casos, calculou-se o tamanho das projeções ortogonais da elipse e do círculo, bem como duas elipses em relação aos eixos Ox e Oy , e avaliou-se a área mínima ocupada pelas mesmas dentro de uma região retangular. Alguns exemplos são apresentados a seguir.

Para o caso 1, considerou-se em um dos exemplos a elipse de semi-eixos 6 e 4 e o círculo de raio igual a 4. Resultados gráficos do exemplo podem ser observados abaixo (Figuras 11 e 12), sendo à direita o gráfico da elipse e do círculo tangentes em um único ponto e a esquerda o gráfico que descreve a área obtida pelas mesmas dentro de uma região retangular.

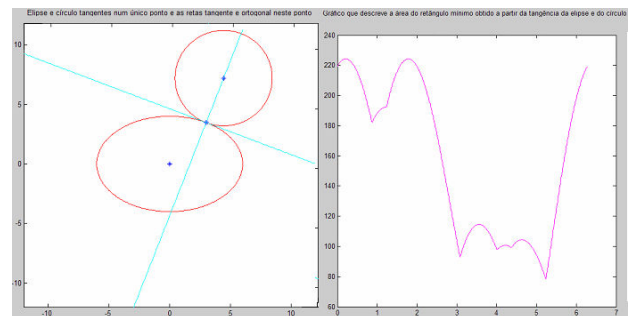


Figura 11: Área mínima igual a aproximadamente 78.3791 para $\varphi_1 = \pi/3$.

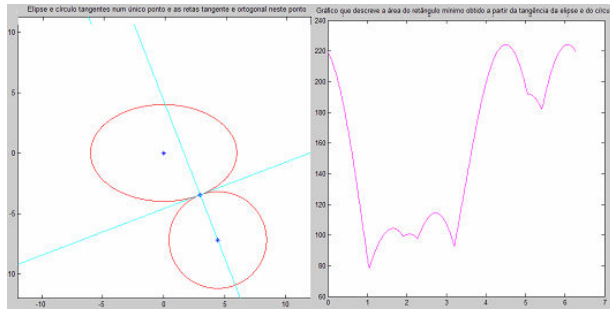


Figura 12: Área mínima igual a aproximadamente 78.4222 para $\varphi_1 = 5\pi/3$.

Para o caso 2, considerou-se a primeira elipse de semi-eixos iguais a 6 e 4 e a segunda elipse de semi-eixos iguais a 4 e 3. Resultados gráficos do exemplo podem ser observados nas Figuras 13, 14 e 15, sendo à direita o gráfico das elipses tangentes em um único ponto e à esquerda do gráfico que descreve a área obtida pelas projeções das elipses.

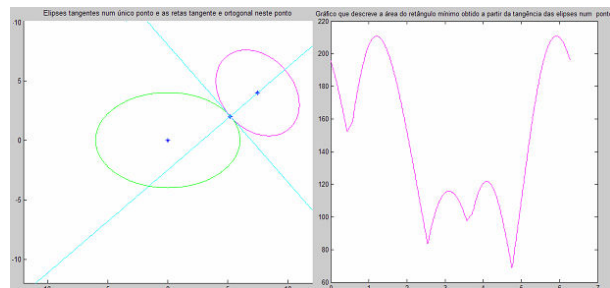


Figura 13: Área mínima igual a aproximadamente 68.8551 quando $\varphi_1 = \pi/6$.

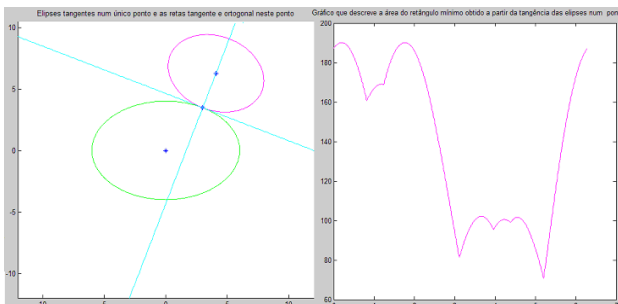


Figura 14: Área mínima aproximada igual a 70.8675 quando $\varphi_1 = \pi/3$.

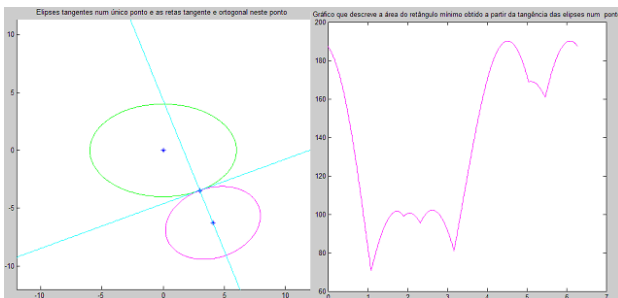


Figura 15: Área mínima aproximada igual a 70.7289 quando $\varphi_1 = 5\pi/3$.

VI. RESULTADOS ESPERADOS E PROPOSTAS FUTURAS DE TRABALHOS

Posteriormente, através dos resultados obtidos neste trabalho, almeja-se solucionar o problema de empacotamento de duas elipses dentro de uma região retangular utilizando uma metodologia baseada em Geometria Diferencial, cujos pré-requisitos necessários para o entendimento da mesma se reduzem geralmente ao entendimento de Cálculo e Geometria Analítica. No contexto de Geometria Diferencial, em vez de considerar-se curvas definidas por equações, retorna-se a ideia intuitiva de que uma curva descreve a trajetória contínua do movimento de uma partícula sobre o plano (Valladares, 1979) em [17], ou seja, se considerar que um ponto $f(t)$ representa a posição de uma partícula em movimento contínuo, quando o tempo t varia em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, o traço da curva (imagem) será $C = \{f(t) = (x(t), y(t)), t \in I\}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Tal abordagem conterá várias informações sobre como o ponto $f(t)$ percorre o conjunto C , permitindo definir, por exemplo, a velocidade, aceleração, etc.

Finalmente, após desenvolver uma metodologia que solucione o problema do empacotamento de duas elipses a partir de Geometria Diferencial, pretende-se com o auxílio de um algoritmo heurístico, encontrar a equação que descreve a área mínima aproximada de uma região retangular mínima, a qual contenha inscrita n elipses, idênticas ou não e não sobrepostas dentro dessa região retangular.

VII. REFERÊNCIAS

- [1] Altimari, R. e Birgin, E. G. *Algoritmos Aproximados para o Problema do Corte Circular Restrito*, 2005.
- [2] Arenales, M. N. *Uma teoria para o problema de corte*. Tese de Livre Docência, ICMSC-USP, São Carlos, SP, 2003.
- [3] Birgin, E. G. e Sobral, F.N.C. *Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems*, Computers & Operations Research, vol. 35, 2008, p. 2357-2375.
- [4] Castro A. L. e Pandolfelli, V. C. *Revisão: Conceitos de dispersão e empacotamento de partículas para a produção de concretos especiais aplicados na construção civil*. Departamento de Engenharia de Materiais, Universidade Federal de São Carlos, SP, 2009.
- [5] Cecilio, F.O. *Refinamentos na heurística de George e Robinson para o problema do carregamento de caixas dentro de contêineres*. Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos, SP, 2003.
- [6] Cherri, A. C., Arenales, M. N. *O problema de corte de estoque com reaproveitamento das sobras de material - heurística FFD modificada*. XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Gramado - RS, 2009.
- [7] Constantino A. A. e Gomes Junior A. M. *Um algoritmo genético híbrido para o problema de corte industrial Bidimensional*. Departamento de Informática, Universidade Estadual de Maringá, Paraná, Brasil, 2002.
- [8] Dyckhoff, H. e Finke, U. *Cutting and Packing in Production and Distribution: Typology and Bibliography*. Springer-Verlag Co, Heidelberg, 1992.
- [9] Ghidini, C. T. L. S. *Otimização de Processos Acoplados: Programação da Produção e Corte de Estoque*. Tese de doutorado, ICMC - USP, 2009.
- [10] Gilmore, P. e Gomory, R. *A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem*. Operations Research, 9, 1961, p. 849-859 e Operations Research, 11, 1963, p. 863-888.

[11] Goldberg, D. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley, 1989.

[12] Gooldrich, M. T. e Tamassia, R. *Projetos de Algoritmos - Fundamentos, análise e exemplos da internet*. Editora Bookman, SP, 2002, p.583-627.

[13] Johnson, D. S. e Garey, M. R. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NPCompleteness*, W.H. Freeman and Company, São Francisco, 1979.

[14] Paula Junior, J. R. e Xavier, A. E. *Resolução do problema de empacotamento de circunferências na superfície de uma esfera utilizando suavização hiperbólica*. Tese de mestrado, UFRJ, RJ, 2010.

[15] Rocha, A. e Dorini, L. B. *Algoritmos gulosos: definições e aplicações*. Universidade Estadual de Campinas, SP, 2004.

[16] Tenenblat, K. *Introdução a Geometria Diferencial*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1990, 278 p.

[17] Valladares, R. J. C. *Introdução a Geometria Diferencial*. Niterói, UFF, 1979, 272 p.