

# Tomografia sísmica poço-a-poço utilizando PSO com regularização esparsa

Arthur Anthony da Cunha Romão E Silva  
Centro de Ensino Superior do Seridó  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Caicó, Rio Grande do Norte  
arthur.romao.700@ufrn.edu.br

Francisco Márcio Barboza  
Departamento de Computação e Tecnologia - UFRN  
Universidade do Rio Grande do Norte  
Caicó, Rio Grande do Norte  
marcio.barboza@ufrn.br

**Resumo**—No presente artigo é abordado o estudo do problema inverso para o imageamento da subsuperfície em tomografia sísmica poço-a-poço, que consiste na inversão dos dados sísmicos através de meta-heurística global *Particle Swarm Optimization*, com o uso de modelagem de raios retos e a aplicação dos vínculos: Suavidade, Variação Total e Esparsidade. Os resultados das inversões com os modelos sintéticos foram satisfatórios. No primeiro modelo sintético, baseando-se nos gráficos dos erros cumulativos relativos, o resultado das inversões utilizando o vínculo de Variação Total obteve melhor resultado, em seguida o vínculo de Suavidade. Já no segundo modelo sintético, o vínculo de Esparsidade (DCT) obteve menor erro cumulativo relativo.

**Palavras-chave**—Tomografia Poço-a-poço, Inversão Sísmica, Regularização, PSO

## I. INTRODUÇÃO

A tomografia sísmica, também chamada de Geotomografia, é uma técnica de reconstrução de imagem que tem por objetivo obter as propriedades geológicas de um determinado local a partir da inversão de dados sísmicos, seja a partir de ondas eletromagnéticas ou mecânicas [1].

Inversão de dados sísmicos é um problema geofísico inverso, que é uma ferramenta matemática utilizada na geofísica para estimar os parâmetros do modelo a partir de um conjunto de dados observados. Pode ser transformado em um problema de otimização, que consiste na busca de um mínimo de um funcional, neste contexto tem como premissa o ajuste dos parâmetros do modelo. Geralmente é considerado um problema mal-posto, isto é, a solução não existe, ou não possui uma única solução que ajustam o funcional, ou sua solução é instável, por causa dos ruídos nos dados observados obtidos, que podem provocar grandes mudanças nos parâmetros dos modelos estimados [2]. Neste sentido, é necessário a aplicação de regularização para torná-lo em um problema bem-posto e incorporar uma informação geológica *a priori* à solução, de forma que obtenha soluções aceitáveis aproximadas [3, 4, 5]. A regularização clássica utilizada nestas situações é a regularização de Tikhonov [6].

Há inúmeras estratégias para regularização de um problema geofísico inverso, tornando-o um problema bem-posto e

garantindo soluções geologicamente aceitáveis [7]. Algumas metodologias consistem em aplicar um viés suave a solução, como o vínculo de Suavidade (Tikhonov), Variação Total, para modelos que possuem grandes contrastes, como mudanças abruptas nas velocidades ou anomalias no modelo [8], ou podemos supor que as soluções são esparsas num domínio transformado, neste caso utilizamos a incorporação do vínculo de Esparsidade, do tipo *Discrete Cosine Transform* (DCT) e *Discretized Wavelet Transform* (DWT) [9, 10]. Algumas aplicações em problemas geofísicos inversos consistem no imageamento de estruturas geológicas, exploração mineral, como também na exploração de sítios arqueológicos [11, 12, 13]. Utilizamos otimização global como estratégia de minimizar o funcional na busca pela solução.

A tomografia sísmica é dividida em duas categorias: a da forma de onda, que utiliza como dado observado o formato de onda que chega nos receptores; a de tempo de trânsito, que utiliza o tempo que as ondas mecânicas saem do emissor até chegar no receptor [14]. Neste trabalho utilizamos a tomografia sísmica poço-a-poço com a categoria de tempo de trânsito, que consiste em estimar a distribuição das vagarosidades (inverso da velocidade) das rochas em determinado espaço a partir da inversão dos dados sísmicos dos tempos de trânsitos capturados.

Neste artigo, um algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas é implementado e aplicado à inversão de tomografia sísmica poço-a-poço. *Particle Swarm Optimization* (PSO) é uma técnica de otimização global interessante que foi heurísticamente inspirada no comportamento social de grupos de animais (pássaros e peixes) na natureza [15].

O objetivo deste trabalho é desenvolver e implementar algoritmos de inversão tomográfica poço-a-poço utilizando o algoritmo PSO com a incorporação dos vínculos de Suavidade, Variação Total e Esparsidade (DCT e DWT). Além da comparação de performance dos vínculos nas inversões em dados sintéticos.

## II. REFERENCIAL TEÓRICO

### A. Tomografia poço-a-poço

A tomografia poço-a-poço é uma das diversas técnicas existentes de obter a inversão de dados sísmicos, a aquisição dos dados utilizados no processo de inversão consiste em obter os tempos de percurso das ondas acústicas que transpassam a subsuperfície a partir de dois poços perfurados na superfície, um poço será posto os emissores das ondas acústicas, e no outro os receptores [16]. É utilizado estes dados (tempo de percurso) para imagear a subsuperfície, descobrindo assim as características das rochas, ou seja, as vagarosidades das rochas na região desejada [14].

Segundo [17], o caminho percorrido pela onda sísmica é discretizado em células de mesmo tamanho, chamadas pixels, colocando emissores em diversos pontos específicos, e os receptores do mesmo modo. A partir disso é possível estimar a vagarosidade das rochas através de uma certa quantidade de raios passando naquela região (Fig. 1).

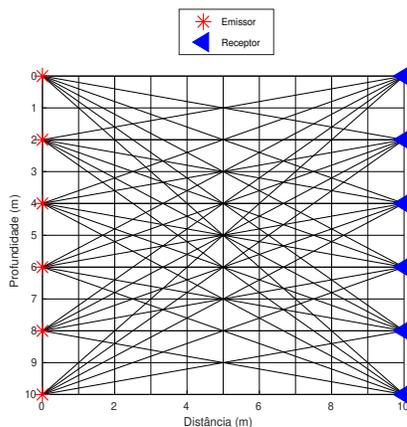


Fig. 1. Simulação geométrica das ondas acústicas transpassando a subsuperfície dos emissores para os receptores

1) *Problema direto*: Existem diversas formas de criar a modelagem computacional direta para gerar os dados sintéticos, neste caso implementamos a modelagem de raios retos baseado em [18], visto que a distância dos poços são bem próximos.

A geração dos dados sintéticos se dá pelo somatório dos tempos de cada onda que passa de um emissor para um receptor, obtemos a partir disto um vetor  $t$  de dados observados com tamanho  $m \times 1$ , onde  $m$  é o produto da quantidade de emissores pela quantidade de receptores, isto é realizado através de um algoritmo de modelagem. A equação 1 demonstra como é calculado os dados de percurso no problema direto.

$$t_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} s_j \quad (1)$$

Onde  $t_i$  é o tempo observado da onda do  $i$ -ésimo emissor, sendo  $n$  o número de parâmetros,  $d_{ij}$  é o comprimento da onda sísmica do  $i$ -ésimo emissor através da  $j$ -ésima célula discretizada, e  $s_j$  é a vagarosidade desta. Matricialmente podemos ter:

$$Gs = t \quad (2)$$

Onde  $G$  é a matriz com os comprimentos dos raios em cada pixel, sendo  $G = [d_{ij}]$ ,  $s$  é o vetor dos parâmetros, no caso as vagarosidades, e  $t$  é o vetor dos dados observados.

2) *Problema Inverso*: Um problema geofísico inverso consiste na técnica de estimar os parâmetros de um modelo a partir dos dados observados, isto é feito por meio de um modelagem matemática que inclui um funcional de desajuste, sendo este uma função que avaliará o quão próximo está o parâmetro estimado da solução. Há inúmeras aplicações, no presente trabalho abordamos especificadamente a tomografia sísmica poço-a-poço.

É importante destacar que a busca por estimar os parâmetros de um modelo envolve certa instabilidade e falta de unicidade na solução, tornando um problema mal-posto, isto ocorre pela não unicidade da solução em decorrência de ruídos nos dados observados, e também pela modelagem matemática do problema inverso, que permite que diversos parâmetros satisfaçam o funcional, ou seja, os dados observados podem ser ajustados no funcional de desajuste por diferentes tipos de parâmetros.

Por este motivo é necessário o uso de regularização, para aplicar um viés geológico a solução de forma que o problema mal-posto se torne bem-posto, e implique em uma solução estável aceitável, para isto utilizamos os vínculos. Estes são procedimentos matemáticos que agregam restrições aos parâmetros estimados. Desta forma desejamos minimizar o funcional e aplicar uma informação *a priori* a solução, feitas a partir de uma função regularizadora.

## III. METODOLOGIA

A função objetivo  $\mathcal{L}(s)$  na qual devemos minimizar é portanto composta pelo funcional de desajuste, denominado pelo símbolo  $\Phi$  e a incorporação de um vínculo, identificado pelo símbolo  $\mathcal{R}$ , como mostrado na equação 3.

$$\mathcal{L}(s) = \Phi + \frac{\lambda \mathcal{R}}{f_{\mathcal{R}} \cdot n} \quad (3)$$

Onde

$$\Phi = \frac{\|t_{obs} - Gs\|_2^2}{f_{\Phi} \cdot m} \quad (4)$$

Na parcela do funcional que se refere ao desajuste, nós temos o componente  $t_{obs}$ , que é o vetor que contém os tempos de percurso das ondas sobre a subsuperfície, através dos

dois poços perfurados.  $G$  é a matriz de modelagem e  $s$  é o vetor de parâmetros, além do fator de normalização  $f_\Phi$  e o número de observações  $m$ . Já na outra parcela, o  $\mathcal{R}$  se remete a um vínculo, e  $f_{\mathcal{R}}$  o seu fator de normalização. O  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange, sendo este o fator de balanceamento entre o desajuste e o vínculo, que pode ser controlado a partir de modo empírico ou pelo método da curva L [19]. A Fig. 2 mostra uma curva L típica das inversões realizadas nos modelos sintéticos deste trabalho.

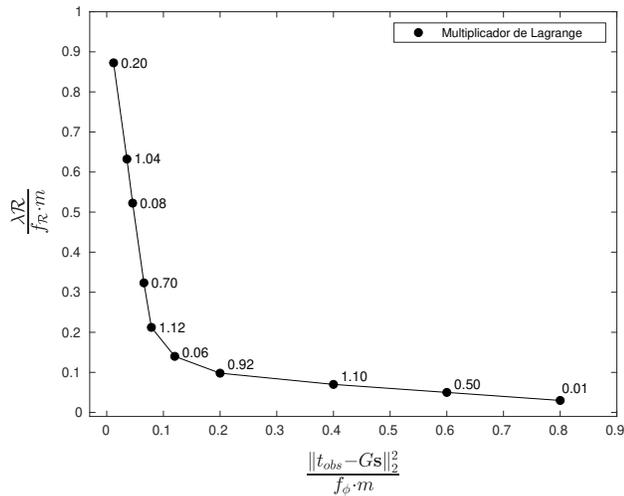


Fig. 2. Método da Curva L

O fator de normalização do funcional de desajuste  $f_\Phi$  e do vínculo  $f_{\mathcal{R}}$  são escolhidos para ajustar a escala do espaço de busca da solução, que são os possíveis parâmetros a ajustarem o funcional, para facilitar a escolha do multiplicador de Lagrange  $\lambda$ .

1) *Vínculos*: Os vínculos utilizados foram os de Suavidade, para modelos mais suaves, sem mudanças abruptas nas velocidades, mas uma consistência, que é Tikhonov de primeira ordem, Variação Total, para modelos com grandes mudanças abruptas, e Esparsidade, sendo utilizado para modelos com velocidades em um domínio esparsos [20], isto é, com muitos componentes nulos. Para este último utilizamos a transformada DWT e DCT para obter representações geológicas a partir da regularização num domínio transformado.

#### a) Suavidade:

Um processo de regularização frequentemente utilizado para recuperar uma solução suave é minimizar o funcional de Tikhonov:

$$\mathcal{L}(s)_{\ell_2} = \Phi + \frac{\lambda \mathcal{R}_{\ell_2}}{f_{\mathcal{R}_{\ell_2}} \cdot n} \quad (5)$$

Onde

$$\mathcal{R}_{\ell_2} = \|Ds\|_2^2 \quad (6)$$

Em que  $D$  é a matriz de Suavidade, que consiste nas diferenças horizontais e verticais dos parâmetros adjacentes.

#### b) Variação Total:

Outro vínculo conhecido na geofísica é o de Variação Total, na qual o funcional a ser minimizado é:

$$\mathcal{L}(s)_{TV} = \Phi + \frac{\lambda \mathcal{R}_{\ell_1}}{f_{\mathcal{R}_{\ell_1}} \cdot n} \quad (7)$$

Onde

$$\mathcal{R}_{\ell_1} = \|Ds\|_1 \quad (8)$$

#### c) Esparsidade:

O vínculo de Esparsidade consiste em um método de regularização utilizando-se da norma  $\ell_1$ , levando a um modelo estimado com maior contraste de vagariedades [9, 21, 22]. Utilizamos a transformada DWT e DCT para construir modelos geológicos aceitáveis, na qual são esparsos em um domínio transformado, isto é, possui muitos componentes nulos.

$$\mathcal{L}(s)_{sp} = \Phi + \frac{\lambda \mathcal{R}_{sp}}{f_{\mathcal{R}_{sp}} \cdot n} \quad (9)$$

Onde

$$\mathcal{R}_{sp} = \|Ms\|_1 \quad (10)$$

Em que  $\mathcal{M}$  é a matriz da transformada DWT ou DCT.

### A. Otimização Global

A Otimização Global se tornou um fator fundamental para diversas áreas da ciência que envolvem otimização, e este presente trabalho enfatiza o algoritmo meta-heurístico PSO aplicado ao problema geofísico inverso de tomografia poço-a-poço. Problemas de otimização consistem basicamente em encontrar valores aproximados ótimos de uma função objetivo. Envolvem métodos estocásticos e determinísticos. O objetivo é encontrar o menor (mínimos) ou o maior (máximos) global, que pode ser único ou não. Escolhemos otimização global em detrimento da local pela facilidade da implementação e por não necessitar da escolha de uma solução inicial [23, 24].

1) *Particle Swarm Optimization*: O PSO é um algoritmo meta-heurísticos estocástico, isto é, realiza uma busca aleatória com operadores que permitem o ajuste. É baseado no comportamento social de enxame, como observado pelos pássaros e cardume de peixes. Envolve o compartilhamento de conhecimento entre o enxame e conhecimento individual a busca de um alimento (objetivo) [15].

Um dos algoritmos evolutivos bioinspirados mais conhecidos, em que sua implementação básica consiste em um operador, que é o de atualização da velocidade da partícula, gerando assim novas soluções. No presente artigo abordamos a versão padrão (ver Algoritmo 1) com alguns ajustes que foram necessários com fins de

gerar soluções de inversões em tomografia poço-a-poço.

---

**Algoritmo 1:** *Particle Swarm Optimization*

---

**Parâmetros de controle:** Tamanho da população ( $p_s$ ), fator de inércia ( $\omega$ ), coeficiente de aprendizagem individual (cognitiva) ( $c_1$ ), coeficiente transmissão cultural (social) ( $c_2$ ), número de iterações ( $k$ );

**Saída:** melhor solução  $\mathbf{s}$ ;

Gerar população inicial  $P$  aleatoriamente;

Avaliar aptidão da função  $\mathcal{L}(\mathbf{s})$  para cada partícula contida em  $P$ ;

**foreach** partícula  $s_i$  em  $P$  **do**

$\mathcal{L}_{pbest}^i \leftarrow \mathcal{L}(\mathbf{s}_i)$ ;  
 $\mathbf{s}_i^{pbest} \leftarrow \mathbf{s}_i$ ;

**end**

$gbest \leftarrow$  melhor  $\mathbf{s}_i$  em  $P$ ;

$k \leftarrow 1$ ;

**while** Critério de parada não for satisfeito **do**

**foreach** partícula  $s_i$  em  $P$  **do**

Atualizar velocidade utilizando  $v_i^k \leftarrow \omega v_i^{k-1} + c_1 \cdot r_1 (\mathbf{s}_i^{pbest} - \mathbf{s}_i^{k-1}) + c_2 \cdot r_2 (gbest - \mathbf{s}_i^{k-1})$ ;

Atualizar posição da partícula utilizando

$\mathbf{s}_i^k \leftarrow \mathbf{s}_i^{k-1} + v_i^k$ ;

Avaliar aptidão da partícula por meio da função

$\mathcal{L}(\mathbf{s}_i)$ ;

**if**  $\mathcal{L}(\mathbf{s}_i^k) < \mathcal{L}_{pbest}^i$  **then**

$\mathcal{L}_{pbest}^i \leftarrow \mathcal{L}(\mathbf{s}_i^k)$ ;

$\mathbf{s}_i^{pbest} \leftarrow \mathbf{s}_i^k$ ;

**end**

**if**  $\min \mathcal{L}(\mathbf{s}_i^k) < \mathcal{L}_{gbest}$  **then**

$\mathcal{L}_{gbest} \leftarrow \min \mathcal{L}(\mathbf{s}_i^k)$ ;

$gbest \leftarrow \mathbf{s}_g$ ;

**end**

$k = k + 1$ ;

**end**

**end**

retornar o melhor  $\mathbf{s} = gbest$ ;

---

Segundo [25], a base do algoritmo parte de uma população inicial pseudoaleatória que percorre um espaço de busca com o intuito de encontrar a região mais promissora, isto é, que possua valores com menor valor da função objetivo. A posição das partículas são modificadas utilizando como parâmetro duas constantes, que representa o conhecimento global e individual de cada elemento, respectivamente.

Cada partícula  $\mathbf{s}_i$  é representada por sua posição, sendo esta a solução. No contexto deste trabalho é o vetor de vagarosidades de uma determinada região na subsuperfície. Além da posição temos a velocidade da partícula e sua melhor posição já encontrada. A solução é um ponto em um espaço  $n$ -dimensional, sua velocidade é dada por  $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ , e sua posição por  $\mathbf{s}_i = (\mathbf{s}_{i1}, \mathbf{s}_{i2}, \dots, \mathbf{s}_{in})$ , a melhor posição do grupo é dada por  $gbest$ .

Uma solução (partícula) se moverá com base em sua

posição inicial, num intervalo específico determinado pelo problema de otimização, como também de sua velocidade e da melhor solução global. Para evitar as explosões de velocidade, impedindo que as mesmas alcancem soluções aceitáveis, é ajustado suas velocidades e seu domínio de busca [25]. As equações 11 e 12 representam como ocorrem estes ajustes.

$$v_i^{k+1} = \omega v_i^k + c_1 \cdot r_1 \cdot (\mathbf{s}_i^{pbest} - \mathbf{s}_i^k) + c_2 \cdot r_2 \cdot (gbest - \mathbf{s}_i^k) \quad (11)$$

$$\mathbf{s}_i^{k+1} = \mathbf{s}_i^k + v_i^k \quad (12)$$

onde  $\mathbf{s}_i^k$  é partícula  $i$  na iteração  $k$ ,  $v_i^k$  é a velocidade da partícula  $i$  na iteração  $k$ ,  $\mathbf{s}_i^{pbest}$  é a melhor posição encontrada pela partícula  $\mathbf{s}_i$  até o momento.  $\omega$  é o fator de inércia, cuja função é balancear a busca global e a local,  $r_1$  e  $r_2$  são fatores distribuídos uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ ,  $c_1$  é o coeficiente de aprendizagem individual (cognitiva) e  $c_2$  o coeficiente de transmissão cultural (social), ambos são fatores de aceleração da partícula.

O três parâmetros,  $\omega$ ,  $c_1$  e  $c_2$  ajustam o comportamento das partículas, por exemplo a capacidade de extrapolar os mínimos locais, o número de iterações e a convergência de suas soluções ótimas.

O algoritmo termina quando o número de iterações é atingido ou o critério de convergência é satisfeito. O critério utilizado neste trabalho foi o de Cauchy, aplicado a cada componente do funcional [4]. Este avalia a diferença entre os valores das parcelas do funcional (ver equações 13 e 14) nos estágios  $\mathbf{s}_k$  e  $\mathbf{s}_{k-1}$ , se estiverem abaixo de um limiar  $\delta$  sob um determinado período  $\mathcal{E}$ , então a solução convergiu.

$$\mathcal{X}_k^\Phi = |\Phi(\mathbf{s}_k) - \Phi(\mathbf{s}_{k-1})| \leq \delta_\Phi \quad (13)$$

$$\mathcal{X}_k^\mathcal{R} = |\mathcal{R}(\mathbf{s}_k) - \mathcal{R}(\mathbf{s}_{k-1})| \leq \delta_\mathcal{R} \quad (14)$$

### B. Escolha dos parâmetros de inversão e fatores de normalização

Dois modelos geológicos sintéticos foram escolhidos para realizar o experimento. Este teve como estratégia a aplicação de otimização global com o algoritmo PSO e a aplicação de métodos de regularização. Os dados observados foram gerados a partir da modelagem de raios retos, e aplicamos sobre estes 5% de ruído gaussiano pseudoaleatório.

Os modelos escolhidos foram discretizados em 100 parâmetros, ou seja, o imageamento consiste em uma matriz de ordem 10 onde cada índice  $ij$  consiste nas velocidades das rochas. A busca pelos parâmetros estimados dos modelos durante a inversão dos dados sísmicos se deu pelo intervalo de vagarosidades de 50% a mais e 50% a menos dos parâmetros dos modelos verdadeiros. Os parâmetros do

algoritmo PSO estão detalhados na tabela I.

$p_s$	1000
$\omega$	0.9
$c_1$	2
$c_2$	2
$k$	1000
$n$	100
$\lambda$	0.06
$\mathcal{E}$	300
$\delta$	$1 \times 10^{-10}$

Tabela I  
PARÂMETROS DE INVERSÃO

Os coeficientes de aprendizagem individual ( $c_1$ ) e transmissão cultural ( $c_2$ ) são geralmente definidos pelo valor 2, como também o fator de inércia 0.9 [26, 27].

Os fatores de normalização são utilizados para facilitar a escolha do multiplicador de Lagrange  $\lambda$ , pois torna a imagem da função objetivo em um intervalo aproximado de  $[0, 1]$ . Dessa forma diminuindo o *range* da escolha desse. A escolha se deu a partir de inversões testes iniciais com poucas partículas e poucas iterações. Para realizarmos as 10 inversões em cada modelo sintético utilizamos um fator de normalização para cada vínculo e funcional de desajuste, conforme a tabela II.

	Modelo 1	Modelo 2
$\mathcal{L}(s)_{\ell_2}$	$f_{\Phi} = 10$ $f_{\mathcal{R}_{\ell_2}} = 2.5$	$f_{\Phi} = 6$ $f_{\mathcal{R}_{\ell_2}} = 1$
$\mathcal{L}(s)_{TV}$	$f_{\Phi} = 12$ $f_{\mathcal{R}_{TV}} = 1.3$	$f_{\Phi} = 6$ $f_{\mathcal{R}_{TV}} = 1$
$\mathcal{L}(s)_{DCT}$	$f_{\Phi} = 12$ $f_{\mathcal{R}_{DCT}} = 1$	$f_{\Phi} = 8$ $f_{\mathcal{R}_{DCT}} = 1$
$\mathcal{L}(s)_{DWT}$	$f_{\Phi} = 12$ $f_{\mathcal{R}_{DWT}} = 26$	$f_{\Phi} = 6$ $f_{\mathcal{R}_{DWT}} = 19.5$

Tabela II  
FATORES DE NORMALIZAÇÃO

A descoberta do multiplicador de Lagrange  $\lambda$  se deu também pela realização um conjunto de inversões com di-

versos valores, e estipulou-se a partir da curva L [19] o uso de um multiplicador ideal para utilizar nas inversões nos dois modelos sintéticos.

#### IV. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção apresentamos os resultados do experimento, que consistem nas figuras dos modelos estimados, curva de convergência da função objetivo, do funcional, dos vínculos, bem como as figuras dos erros cumulativos relativos.

Os modelos sintéticos escolhidos são considerados geologicamente suaves, com uma estrutura não complexa. A partir dos resultados podemos inferir uma interpretação geológica dos modelos, que são expressivos para a definição de qualidade dos resultados, e estes devem ser razoáveis a depender dos critérios estabelecidos no problema inverso.

Além disso, a análise dos erros cumulativos relativos mostrará o quanto de erro está incorporado aos dados, a partir disso podemos definir qual vínculo melhor estabilizou o problema inverso e auxiliou na busca pela melhor solução.

##### A. Modelo 1 - Anomalia no Centro

O modelo 1 (Fig. 3) se caracteriza por ser suave, todavia com uma anomalia concentrada no centro, não sendo uma estrutura geológica complexa, principalmente para o método de inversão utilizado, que consiste em passar raios com maior incidência no centro do modelo, levando a bons resultados por causa da boa iluminação no centro.

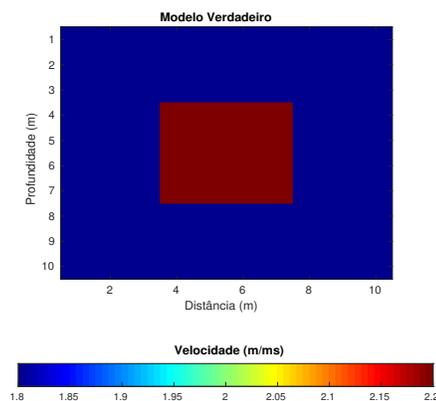


Fig. 3. Modelo com anomalia no centro. Adaptado de [7]

A Fig. 4 mostra os resultados obtidos a partir da média das 10 inversões utilizadas no modelo 1 para cada vínculo. Todos os resultados obtidos foram satisfatórios para estimar os parâmetros do modelo verdadeiro. A eficácia das inversões são ratificadas a partir de uma análise estatística dos erros cumulativos relativos dos dados das soluções médias dos modelos estimados.

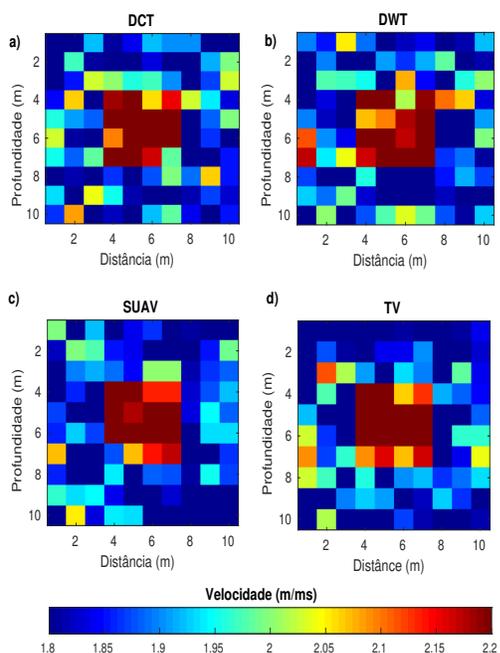


Fig. 4. Resultado das inversões do Modelo 1

A Fig. 5 mostra a curva de convergência da função objetivo, desajuste e dos vínculos utilizados. É perceptível que as soluções convergiram durante o período das iterações, isto é, a função objetivo foi minimizada e todos os vínculos foram incorporados a solução. Nota-se que o vínculo de Suavidade convergiu mais rápido que os demais.

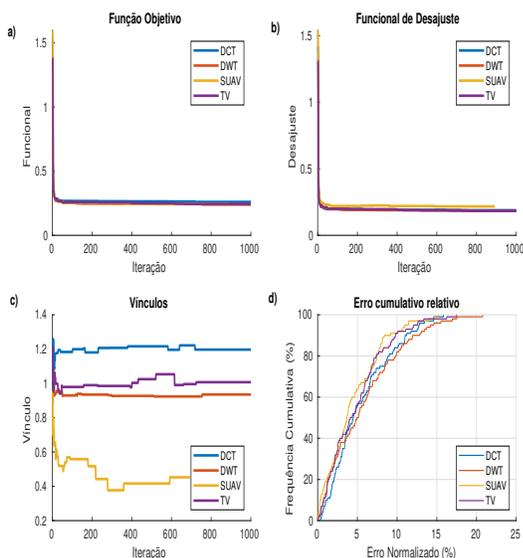


Fig. 5. Figuras de convergência típicas das soluções para cada vínculo do modelo 1. a) Minimização da Função Objetivo, b) Minimização e Convergência da Função de desajuste, c) Minimização da função dos vínculos e d) Erro cumulativo relativo

No item d) é expresso os erros cumulativos relativos a

cada vínculo. As soluções médias obtidas possuem um erro cumulativo aproximado, o vínculo de Variação Total obteve acurácia de 10% de erro em aproximadamente 90% dos dados juntamente com o vínculo de Suavidade, no qual se destacam tendo menor erro cumulativo entre os demais vínculos, regularizando um modelo com mudanças abruptas no centro. Em seguida, nós temos os vínculos de Esparsidade, DCT com uma acurácia de 10% do erro cumulativo relativo em aproximadamente 82% dos dados, e um pouco abaixo o DWT, com acurácia de 10% de erro cumulativo relativo em aproximadamente 80% dos dados.

*B. Modelo 2 - Modelo em Camadas Inclinadas*

O modelo 2 (Fig. 6) baseado em [28] é caracterizado por possuir uma estrutura geológica em camadas inclinadas, sem falhas ou mudanças abruptas, porém com uma consistência suave nas velocidades dos parâmetros. Foi feito uma discussão a cerca das médias das soluções partindo de 10 inversões realizadas, bem como uma análise estatística das inversões a partir dos erros relativos cumulativos.

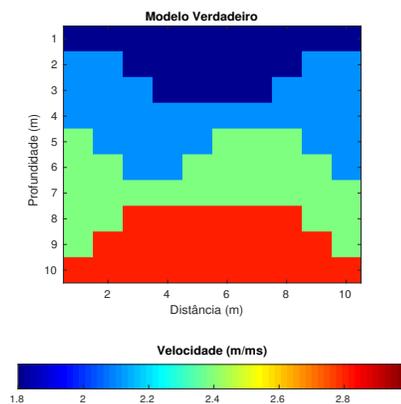


Fig. 6. Modelo em camadas inclinadas. Adaptado de [28]

A Fig. 7 mostra os resultados obtidos da média das 10 inversões utilizadas no modelo 2 para cada vínculo utilizado. Os vínculos se demonstraram eficazes para regularizar, com efeito de tornar o problema bem-posto. Com isso obteve-se resultados satisfatórios ao estimar o modelo verdadeiro, assim como os resultados do modelo 1.

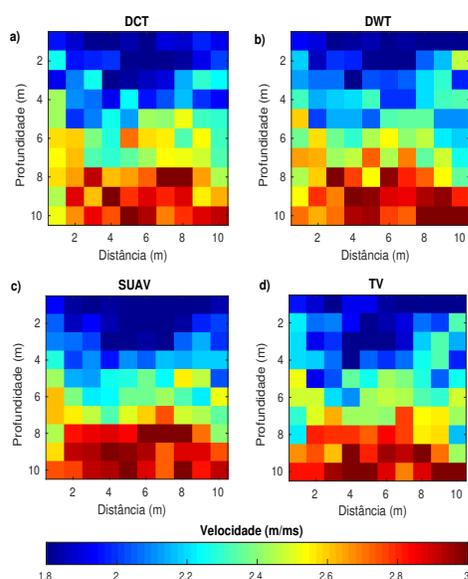


Fig. 7. Resultado das inversões do Modelo 2

A Fig. 8 mostra a curva de convergência da função objetivo, desajuste, dos vínculos utilizados e o erro cumulativo relativo, isto mostra que a solução foi obtida através da otimização, ou seja, a função objetivo foi minimizada e todos os vínculos foram incorporados a solução.

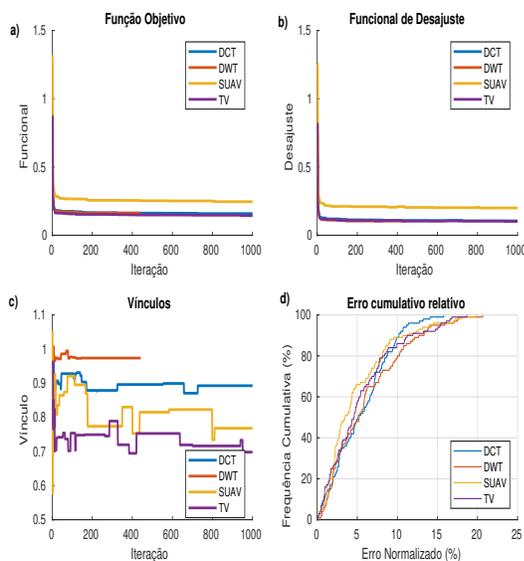


Fig. 8. Figuras de convergência típicas das soluções para cada vínculo do modelo 2. a) Minimização da Função Objetivo, b) Minimização e convergência da Função de desajuste, c) Minimização da função dos vínculos e d) Erro cumulativo relativo

É perceptível que a inversão do modelo 2 com o vínculo de Esparsidade DWT convergiu mais rápido, o vínculo com menor erro cumulativo foi o DCT, aproximadamente 12% do erro cumulativo esta incorporada em aproximadamente

97% dos dados, um pouco abaixo o vínculo de Suavidade e Variação Total com acurácia de 12% do erro cumulativo em 90% dos dados, e por fim o vínculo de DWT com acurácia de 12% do erro cumulativo relativo em aproximadamente 84% dos dados.

O fato do vínculo de Esparsidade DCT obter o menor erro relativo cumulativo entre os demais vínculos mostra sua eficácia em estabilizar o problema inverso, permitindo obter a melhor estimativa do modelo verdadeiro. Com base nisso podemos inferir que os parâmetros do modelo são esparsos no domínio DCT.

## V. CONCLUSÃO

Dois modelos foram utilizados como amostra dos dados sintéticos, que são o modelo da anomalia central e o modelo suave por camadas inclinadas. O *software Matlab* [29] foi utilizado para a produção dos algoritmos de inversão, modelagem de raios retos, como também o algoritmo de otimização global PSO. Os resultados obtidos foram a distribuição de velocidades através dos tomogramas, uma avaliação da convergência da função objetivo, desajuste e dos vínculos, como também uma análise estatística dos erros cumulativos relativos para verificar qual dos vínculos aderiu menos erro em relação aos parâmetros estimados, isto é, a solução mais próxima dos parâmetros.

A escolha do multiplicador de Lagrange  $\lambda$  foi baseada através do método da curva  $L$  [19]. A normalização do funcional e dos vínculos contidos na equação 3 facilitou esta escolha aproximada para os vínculos de Esparsidade (DCT e DWT), Suavidade e Variação Total.

O resultado com melhor convergência foi o de Variação Total no modelo 1, pela característica da anomalia central que obtinha-se uma mudança abrupta nas velocidades, já no segundo modelo foi o vínculo de Esparsidade DCT. A conclusão se deu a partir da análise estatística dos erros cumulativos relativos da média das 10 inversões realizadas para cada vínculo para cada modelo sintético utilizado.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o fornecimento de recursos computacionais pelo Núcleo de Processamento de Alto Desempenho (NPAD) da UFRN.

## REFERÊNCIAS

- [1] J. Silva, "Tomografia interpoços em modelos do campo de Miranga." 2013, monografia (Bacharel em Geofísica), UFBA (Universidade Federal da Bahia), Salvador, Brazil.
- [2] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Courier Corporation, 2003.
- [3] F. Natterer and F. Wübbeling, *Mathematical methods in image reconstruction*. SIAM, 2001.

- [4] F. M. Barboza, “Otimização global para resolver problemas inversos em eletrorresistividade com flexibilidade na escolha dos vínculos,” Ph.D. dissertation, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2017, Programa de Pós-graduação em Geodinâmica e Geofísica.
- [5] V. C. F. Barbosa, J. B. C. da Silva, and W. E. de Medeiros, “Inversão gravimétrica do relevo não suave de uma bacia sedimentar com variação do contraste de densidade,” in *6th International Congress of the Brazilian Geophysical Society*. European Association of Geoscientists & Engineers, 1999, pp. cp–215.
- [6] A. Tikhonov and V. Y. Arsenin, “Solutions of ill-posed problems. winston,” *Washington, DC*, pp. 95–108, 1977.
- [7] M. A. Meju, *Geophysical data analysis: understanding inverse problem theory and practice*. Society of Exploration Geophysicists, 1994.
- [8] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms,” *Physica D: nonlinear phenomena*, vol. 60, no. 1-4, pp. 259–268, 1992.
- [9] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol, “An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint,” *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, vol. 57, no. 11, pp. 1413–1457, 2004.
- [10] B. Jafarpour, V. K. Goyal, D. B. McLaughlin, and W. T. Freeman, “Transform-domain sparsity regularization for inverse problems in geosciences,” *Geophysics*, vol. 74, no. 5, pp. R69–R83, 2009.
- [11] M. Metwaly, A. G. Green, H. Horstmeyer, H. Maurer, A. M. Abbas, and A.-R. Gh. Hassaneen, “Combined seismic tomographic and ultrashallow seismic reflection study of an early dynastic mastaba, saqqara, egypt,” *Archaeological Prospection*, vol. 12, no. 4, pp. 245–256, 2005.
- [12] M. Gustavsson, S. Ivansson, P. Moren, and J. Pihl, “Seismic borehole tomography—measurement system and field studies,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 74, no. 2, pp. 339–346, 1986.
- [13] J. Ajo-Franklin, “Optimal experiment design for time-lapse travelttime tomography,” *Geophysics*, 2009.
- [14] W. M. Telford, W. Telford, L. Geldart, R. E. Sheriff, and R. E. Sheriff, *Applied geophysics*. Cambridge university press, 1990.
- [15] J. Kennedy and R. Eberhart, “Particle swarm optimization,” in *Proceedings of ICNN’95-International Conference on Neural Networks*, vol. 4. IEEE, 1995, pp. 1942–1948.
- [16] A. T. d. Oliveira, “A inversão da forma de onda completa pode compensar a falta de iluminação na tomografia poço-a-poço?” Master’s thesis, Brasil, 2018.
- [17] G. F. Briao and J. P. Zubelli, *Tomografia sísmica por tempo de percurso: modelagem, métodos numéricos e implementação*. IMPA, 2005.
- [18] K. Aki, A. Christoffersson, and E. S. Husebye, “Determination of the three-dimensional seismic structure of the lithosphere,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 82, no. 2, pp. 277–296, 1977.
- [19] P. C. Hansen, “The l-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems,” *WIT Press*, 1999.
- [20] F. M. Barboza, W. E. Medeiros, and J. M. Santana, “A user-driven feedback approach for 2d direct current resistivity inversion based on particle swarm optimization,” *Geophysics*, vol. 84, no. 2, pp. E105–E124, 2019.
- [21] D. L. Donoho, “For most large underdetermined systems of linear equations the minimal 1-norm solution is also the sparsest solution,” *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, vol. 59, no. 6, pp. 797–829, 2006.
- [22] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*. Elsevier, 1999.
- [23] M. K. Sen and P. L. Stoffa, *Global optimization methods in geophysical inversion*. Cambridge University Press, 2013.
- [24] N. Hein *et al.*, “Otimização global determinística: um algoritmo,” Master’s thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1994.
- [25] F. A. C. Viana and V. S. Júnior, “Particle swarm optimization,” *Published in: 14° POSMEC–Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia-MG*, 2004.
- [26] M. Clerc and J. Kennedy, “The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space,” *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6, no. 1, pp. 58–73, 2002.
- [27] R. C. Eberhart and Y. Shi, “Comparing inertia weights and constriction factors in particle swarm optimization,” in *Proceedings of the 2000 congress on evolutionary computation. CEC00 (Cat. No. 00TH8512)*, vol. 1. IEEE, 2000, pp. 84–88.
- [28] R. R. d. S. Dantas, “Resolução em tomografia de tempo de trânsito poço-a-poço: a dependência da iluminação,” Master’s thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2015.
- [29] I. MathWorks, *MATLAB: the language of technical computing. Desktop tools and development environment, version R2018b*. MathWorks, 2018, vol. 9.