O Polo Naval e o município de Rio Grande: um estudo sobre a dinâmica populacional

Cibelle Tavares, *Universidade Federal do Rio Grande, IMEF,* e Bárbara Rodriguez, *Universidade Federal do Rio Grande, IMEF*

***Resumo*—O presente trabalho tem como propósito verificar as modificações ocorridas na população do município de Rio Grande, no qual passou por transformações econômicas com o crescimento do emprego, e da migração trazidos pela implementação do Polo Naval. O objetivo principal é analisar os métodos empregados em um estudo sobre as tendências de crescimento e decrescimento da população de Rio Grande, entre os anos de 2005 e 2015. Os objetivos específicos visam: construir modelos matemáticos para descrever o crescimento populacional e estimar a população futura utilizando os dados coletados junto à Fundação de Economia e Estatística - FEE. Para tanto, definem-se os métodos numéricos (ajuste por Mínimos Quadrados) e o modelo analítico clássico de Malthus para avaliar a dinâmica da população. A avaliação dos modelos obtidos foi feita através do software wxMaxima, que mostrou-se eficiente para a realização dos cálculos e representação gráfica. Por fim, conclui-se que os modelos estudados mostram, em geral, resultados próximos da realidade, mas para o estudo em questão o Modelo Malthusiano pode ser escolhido para estimar os dados populacionais para mais alguns anos.**

***Palavras-chave*—Crescimento populacional, Polo Naval, Rio Grande.**

I. Introdução

O Estudo da dinâmica populacional é importante por dar cunho específico à configuração de uma sociedade e às questões pertinentes aos seus múltiplos aspectos, sejam econômicos, políticos ou socioculturais [12]. É importante, ainda, observar o crescimento da população através das transformações ocorridas durante o processo de urbanização.

O atual município do Rio Grande teve, no seu início, um papel importante na defesa e manutenção do território disputado pelas coroas portuguesas e espanholas. A cidade de Rio Grande foi fundada em 19 de fevereiro de 1737, pelo Brigadeiro José da Silva Paes, e é considerada a mais antiga do Rio Grande do Sul. O município é privilegiado pela sua natureza, pois possui a maior praia do mundo em extensão (Cassino - 245 km, segundo o *Guinness Book*); lagoas; uma reserva ecológica (Taim) com 32 mil hectares e uma infinidade de animais silvestres [9].

A cidade se desenvolveu a partir da intensificação comercial portuária, sinalizada com a perda da Colônia do Sacramento e o início do ciclo do charque no Rio Grande. A dragagem do cais e a construção do Porto (1823), tornaram a Vila do Rio Grande um importante centro comercial [8]. O desenvolvimento econômico propiciado pelo charque e pelo comércio de exportação e importação levou Rio Grande a um crescimento comercial considerável no século XIX [6].

A partir da construção do Porto Novo, no começo do século XX, intensifica-se a ocupação urbana, principalmente próxima às indústrias que se instalavam, o Frigorífico Swift (1917) e a Refinaria Ipiranga (1937) [8].

A partir do início do século XXI, os investimentos, principalmente no setor naval, impulsionaram o crescimento populacional do município. No ano de 2013, com o auge da produção nos estaleiros, Rio Grande e as cidades vizinhas fervilhavam com a presença dos trabalhadores que aqueceram a economia e deram novas perspectivas a uma região desacreditada por décadas [5]. O Polo Naval chegou a empregar quase 20 mil trabalhadores neste ano, transformando o município de Rio Grande na cidade símbolo da nova era econômica na metade sul do estado.

Entretanto, no início do ano de 2017, o setor metalúrgico foi atingido pela crise econômica do país ocasionada pela revelação dos escândalos de corrupção na Operação Lava-Jato e o Polo Naval de Rio Grande passou a empregar pouco mais de 200 funcionários. Este número ainda vem diminuindo e, até o final de 2017, não deve ultrapassar 100 trabalhadores [2].

A variação do número de habitantes do município do Rio Grande está relacionada, entre outros fatores, com a chegada (e saída) de mão-de-obra especializada e a criação (extinção) de vagas de emprego no setor metalúrgico. Em virtude desses índices, decidiu-se, nesse trabalho, estudar a dinâmica da população da cidade de Rio Grande. Acredita-se que a análise da evolução do crescimento do tamanho dessa população possa ser útil para o planejamento da urbanização, desenvolvimento econômico e mercado de trabalho do município.

Para abordar matematicamente o problema, foram empregados métodos numéricos (ajuste por Mínimos Quadrados) e o modelo analítico clássico de Malthus para avaliar a dinâmica da população. Os resultados foram obtidos utilizando-se o software wxMaxima e os dados relativos à população empregados neste trabalho coletados junto à Fundação de Economia e Estatística - (https://www.fee.rs.gov.br) FEE.

Para atingir os objetivos propostos, esse trabalho está organizado da seguinte forma: na seção II, faz-se uma breve revisão bibliográfica sobre a dinâmica populacional. Na seção III, descrevem-se as metodologias utilizadas, abordando-se a fundamentação numérica (ajustes exponencial e polinomial) e a fundamentação analítica (modelo Malthusiano). Na seção IV,

Cibelle Abelenda Tavares é graduanda no curso de Matemática Aplicada na Universidade Federal do Rio Grande - FURG. e-mail: (cibelletavares@hotmail.com).

Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez é doutora em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS e professora na Universidade Federal do Rio Grande - FURG. e-mail: (barbararodriguez@furg.br).

discutem-se os principais resultados obtidos com o emprego do software wxMaxima. Por fim, na seção V, apresentam-se as conclusões a respeito da dinâmica da população da cidade de Rio Grande.

II. Revisão Bibliográfica

Decorrente da importância do estudo da dinâmica de populações para a configuração de uma sociedade encontra-se na literatura uma quantidade significativa de trabalhos que abordam o assunto.

No trabalho de [7] é realizado um estudo abrangente sobre como modelar o crescimento populacional brasileiro. O primeiro passo da autora foi identificar, através de estudos sobre os dados censitários, os quais foram coletados diretamente do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), os relevantes na construção da pesquisa. O trabalho buscou também identificar o melhor resultado para dois problemas similares (população já estimada e população a estimar). Paralelamente, foram investigados alguns estudos já realizados que forneceram suporte para a construção da fundamentação matemática. Dentre as opções existentes foram escolhidos cinco modelos, sobre os quais os estudos foram aprofundados. Os cinco modelos apresentados neste trabalho são: linear, exponencial, polinomial, malthusiano e logístico. Tais modelos são significativos uma vez que possuem diferença na forma como foram desenvolvidos, e mais ainda, no resultado que apresentaram. A autora conclui que para a população já mensurada pelo Censo, o modelo exponencial se adapta também para o estudo de estimativas,apesar de num primeiro momento, crer que o modelo logístico seria o mais indicado.

O artigo de [10] investiga as aplicações dos conceitos matemáticos apresentados e desenvolvidos nas disciplinas da área da Matemática Aplicada, sob a ótica do crescimento populacional. Os autores têm como ideia principal buscar um processo de investigação e compreender com maior profundidade as contribuições da matemática para a sociedade. Levando em consideração o fato do mesmo poder ser analisado, a partir dos conhecimentos científicos e contextualizado, na realidade do município de Osório no Rio Grande do Sul. Foi aplicado o Modelo de Malthus para o crescimento populacional onde compararam os resultados obtidos pelo modelo, com os dados estatísticos obtidos no IBGE, no período de 2001 a 2010. Os autores concluíram que os resultados são muito próximos dos dados fornecidos pelo IBGE.

No trabalho de [1] a ideia básica é mostrar como as equações diferenciais foram desenvolvidas ao longo destes três últimos séculos, bem como suas maiores contribuições para o progresso tecnológico. Foram feitas análises com dados populacionais registrados pelo IBGE, nos anos de 2001 e 2010, em três cidades do Estado de Rondônia: Porto Velho, a capital do Estado de Rondônia, Ji-Paraná e Ouro Preto do Oeste. Para o trabalho foi utilizado o modelo de crescimento e decrescimento populacional de Malthus. O autor conclui que, com base em um simples modelo, pode-se definir o crescimento e decrescimento populacional destes municípios em períodos distintos e de forma lógica.

III. Fundamentação Teórica

A. Método dos Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados, de acordo com a autora [7] é uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados experimentais, isto é, determinar os parâmetros de uma específica função de ajustamento, minimizando o somatório dos quadrados dos resíduos.

Segundo [11] dados os pontos $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_m, f(x_m))$ e as n funções $g_1(x), ..., g_n(x)$ escolhidas de alguma forma. O objetivo é determinar os coeficientes $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tais que a função $\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$.

Seja $d_k = f(x_k) - \varphi(x_k)$ o desvio em x_k. Um conceito de proximidade é que o desvio d_k seja mínimo para todo $k = 1, 2, \ldots, m$. O método dos mínimos quadrados consiste em escolher os $\alpha_j{}'s$ de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima. Visto que a soma $\sum\limits_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} (f(x_k) - \varphi(x_k))^2$ é mínima, tem-se que cada parcela $[f(x_k) - \varphi(x_k)]^2$ também é mínima.

Portanto, dentro do critério dos mínimos quadrados, os coeficientes α_k, que fazem com que $\varphi(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$, são os que minimizam a função,

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2 \\ &= \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \cdots - \alpha_n g_n(x_k)]^2. \end{aligned}$$

Para isto é necessário que as derivadas parciais $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha_j}$, $j = 1, \ldots, n$, sejam nulas, resultando um sistema linear de m equações e n incógnitas [11].

Em outras palavras, com esse método determina-se uma função $\varphi(x)$ de um tipo pré-estabelecido: uma exponencial (ajuste exponencial) ou um polinômio de grau maior ou igual a dois (ajuste polinomial), que melhor ajusta um conjunto de pontos ou uma função dada.

1) Ajuste Exponencial: Segundo [7], faz-se o ajuste de pontos da forma (x_i, p_i) a uma exponencial do tipo $p = \alpha e^{bt}$. Essa função pode ser ajustada através da transformação:

$$\ln p = \ln(\alpha e^{bt}) = \ln\alpha + bt. \tag{1}$$

Fazendo $P = \ln p$ e $a = \ln\alpha$ reduz-se o problema de ajustar a tabela de pontos (x_i, p_i), referente a uma exponencial, ao ajuste linear de $P = a + bt$ do conjunto de pontos (x_i, P_i), onde $P_i = \ln p_i$.

2) Ajuste Polinomial: Segundo [3], um caso especial de ajuste linear múltiplo para $\varphi(x) = \alpha_0 g_0(x) + \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \cdots + \alpha_m g_m(x)$, ocorre quando $g_0(x) = 1, g_1(x) = x, g_2(x) = x^2, \ldots, g_m(x) = x^m$. Deste modo, tem-se:

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_m x^m, \tag{2}$$

então, a partir do conjunto de dados $(x_i, f(x_i))$, a função $Q(d_k)$ definida a partir do desvio $d_k = f(x_k) - \varphi(x_k)$, pode ser escrita em termos dos coeficientes α_j como

$$Q(\alpha_0, \ldots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} \alpha_j {x_i}^j \right)^2 . \quad (3)$$

No ponto em que Q é mínimo,

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_k} = 0,$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Isto implica as equações

$$2 \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} \alpha_j {x_i}^j \right) {x_i}^k = 0, \quad (4)$$

para cada $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, pois

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_k} \left(\sum_{j=0}^{m} \alpha_j {x_i}^j \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \cdots + \alpha_k {x_i}^k + \cdots + \alpha_m {x_i}^m) = {x_i}^k.$$

A equação (4) pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha_j {x_i}^{j+k} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) {x_i}^k$$

$$\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^{j+k} \right) \alpha_j = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) {x_i}^k, \quad (5)$$

para cada $k = 0, 1, \ldots, m$. Ou seja, um sistema de $m + 1$ equações lineares cujas incógnitas são os $m + 1$ coeficientes α_i do polinômio $\varphi(x)$.

O sistema de equações (5) pode ser convenientemente descrito em notação matricial como

$$X^T X \alpha = X^T f, \quad (6)$$

onde

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \ldots & {x_1}^m \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \ldots & {x_2}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \ldots & {x_n}^m \end{pmatrix}, \quad (7)$$

X^T é a sua transposta, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ e $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$.

As equações dadas pelo sistema (6) são denominadas **equações normais**. Essa nomenclatura deve-se ao seguinte fato: o sistema (6) pode ser reescrito como

$$X^T (X\alpha - f) = 0, \quad (8)$$

onde as componentes do vetor entre parênteses, $X\alpha - f$, são chamadas de resíduos da aproximação e, segundo a equação (8) esse vetor é normal (ortogonal) aos vetores formados pelos elementos das linhas da matriz X^T que são da forma: $\begin{pmatrix} {x_1}^l \\ {x_2}^l \\ \vdots \\ {x_n}^l \end{pmatrix}$ para $l = 0, 1, 2, \ldots, m$.

B. *Modelo Malthusiano*

Segundo os autores [14] e [13], a ideia do modelo Malthusiano corresponde à consideração de que a taxa na qual a população de um país cresce, em certo tempo é proporcional à população total do país naquele tempo. Em outras palavras, quanto mais pessoas existem em um tempo t, mais existirão no futuro.

Seja P o número de indivíduos em uma população. Este número é dependente do tempo [4], então esta relação pode ser escrita como:

$$P = P(t). \quad (9)$$

Em termos matemáticos, $P(t)$ corresponde à população total em um tempo t e k é a taxa de crescimento. Assim,

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = k. \quad (10)$$

A equação (10) indica que a variação relativa da população é constante ou, em outras palavras, que a variação da população é proporcional à própria população em cada período de tempo.

O modelo discreto (tempo discreto) de Malthus é dado por

$$P(t+1) - P(t) = kP(t), \quad (11)$$

$$P(t+1) = kP(t) + P(t).$$

Considerando dada a população inicial $P(0) = P_0$, obtém-se a expressão:

$$\begin{cases} P(t+1) = (1+k)P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}, \quad (12)$$

ou seja,

$$P(t) = (1+k)^t P_0. \quad (13)$$

A constante k [4] vai ser uma média entre todos os valores e pode ser obtida, pela equação (14)

$$(1+k)^t = \frac{P(t)}{P_0} \Rightarrow k = \sqrt[t]{\frac{P(t)}{P_0}} - 1, \quad (14)$$

onde $P(t)$ é a taxa de crescimento da população, quando é a população total.

A equação (13) pode ser reescrita na forma exponencial como,

$$P(t) = P_0 e^{\ln(1+k)^t}. \quad (15)$$

Pode-se comparar a solução do modelo de Malthus discreto (10) com a solução do modelo contínuo correspondente, considerando-se que

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}. \quad (16)$$

Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$, tem-se a derivada da função a qual satisfaz a equação (17). Assim, pode-se escrever o modelo contínuo como:

$$\begin{cases} \dfrac{dP(t)}{dt} = k\,P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}. \quad (17)$$

Dessa forma, se k é positiva a população crescerá e se k for negativa a população diminuirá (ela pode diminuir por um tempo sem ir para zero).

A equação (17) é uma equação diferencial ordinária de variáveis separáveis. Para determinar uma função população que satisfaça à equação, primeiramente, deve-se separar as variáveis

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = k\,dt. \quad (18)$$

Integrando-se,

$$\int \frac{dP(t)}{P(t)} = \int k\,dt, \quad (19)$$

$$\ln|P(t)| + \ln C_2 = kt + \ln C_1, \quad (20)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração. Logo:

$$\ln|P(t)| = kt + \ln C, \quad (21)$$

onde $\ln C = \ln C_1 - \ln C_2$.

Aplicando-se as propriedades dos logaritmos usuais à equação (21), obtém-se

$$e^{\ln|P(t)|} = e^{kt+\ln C}, \quad (22)$$

$$P(t) = Ce^{kt}. \quad (23)$$

Quando o tempo for zero ($t = 0$), a população inicial será

$$P_0 = Ce^{k.0} = C. \quad (24)$$

Substituindo (24) na equação (23), obtém-se a solução de (17),

$$P(t) = P_0 e^{kt}. \quad (25)$$

IV. Resultados Numéricos e Discussão

Apresentam-se os resultados obtidos com a implementação dos Métodos Numéricos e Analíticos utilizando o software wxMaxima.

A. *Software wxMaxima*

O wxMaxima é uma interface para o sistema de álgebra computacional Maxima que é um descendente de Macsyma, desenvolvido no final da década de 1960 no *Massachussetts Institute of Technology* (MIT).

O Maxima é um sistema para a manipulação de expressões simbólicas e numéricas, incluindo diferenciação, integração, séries de Taylor, transformações de Laplace, equações diferenciais ordinárias, sistemas de equações lineares, polinômios, conjuntos, listas, vetores, matrizes e tensores. Esse software produz resultados numéricos de alta precisão usando frações exatas, inteiros de precisão arbitrária e números de ponto flutuante de precisão variável. O Maxima pode representar graficamente funções e dados em duas e três dimensões.

Neste trabalho utiliza-se o wxMaxima para se obter os resultados numéricos e gráficos, que descrevem o melhor ajuste para os dados. A versão do wxMaxima utilizada é a 16.04.2.

B. *Estudo sobre a população da Cidade de Rio Grande*

Nessa etapa do trabalho é apresentado o estudo realizado com os dados da população de Rio Grande coletados através da Fundação de Economia e Estatística - FEE, onde será estimada a população para anos futuros. A Tabela I apresenta a população do mesmo entre os anos de 2005 à 2015.

Tabela I
População de Rio Grande - Fonte: FEE

Ano	Tempo	População
2005	0	196482
2006	1	197974
2007	2	199409
2008	3	200878
2009	4	202218
2010	5	203558
2011	6	205604
2012	7	206616
2013	8	209223
2014	9	211410
2015	10	213166

A Figura 1 apresenta o diagrama de dispersão para os dados referentes ao número de habitantes da cidade de Rio Grande. Para relacionar o Ano t e a População P, foi considerado o ano inicial, o qual é chamado ano zero ou ainda tempo zero ($t = 0$), o ano de 2005. Para o ano final ou tempo final, ($t = 10$), o ano de 2015. A escolha do ano inicial foi feita para fins comparativos entre as populações estudadas no presente trabalho.

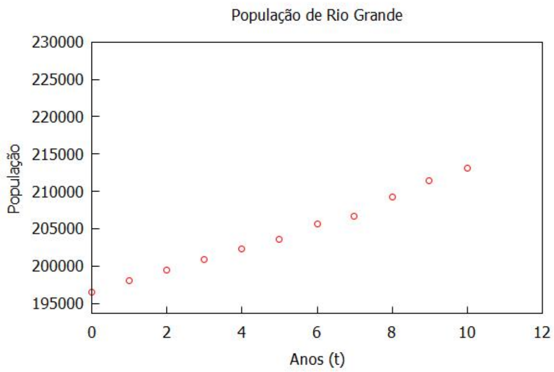

Figura 1. Diagrama de dispersão para os dados da população de Rio Grande no wxMaxima

C. Ajuste Exponencial

Inicia-se o estudo em questão, aplicando o ajuste linear nas variáveis α_1 e α_2, como visto na seção III - A.1) à variável $P_i = \ln p_i$:

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} x_i p_i = \alpha_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = \alpha_2 \sum_{i=1}^{m} x_i + m\alpha_1 \end{array} . \tag{26}$$

Tabela II
CÁLCULO PARA O AJUSTE EXPONENCIAL

i	x_i	y_i	$\ln p_i$	$x_i \ln p_i$	${x_i}^2$
0	0	196482	12,1883	0	0
1	1	197974	12,1958	12,1958	1
2	2	199409	12,2031	24,4062	4
3	3	200878	12,2104	36,6313	9
4	4	202218	12,2171	48,8684	16
5	5	203558	12,2237	61,1185	25
6	6	205604	12,2337	73,4022	36
7	7	206616	12,2386	85,6703	49
8	8	209223	12,2511	98,0092	64
9	9	211410	12,2615	110,3539	81
10	10	213166	12,2698	122,6982	100
$\sum$	55	2246538	134,4934	673,3544	385

Utilizando os dados da Tabela II, tem-se que:

$$\begin{cases} 385\alpha_2 + 55\alpha_1 = 673,3544 \\ 55\alpha_2 + 11\alpha_1 = 134,4934 \end{cases} . \tag{27}$$

Resolvendo o sistema, através do software wxMaxima, obtém-se:

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0,0081 \\ \alpha_1 = 12,1863 \end{cases} . \tag{28}$$

Note que $\alpha_1 = a$ e $\alpha_2 = b$ na função $P = a + bt$ como, por definição $a = \ln \alpha$, então $\alpha = \ln a \Rightarrow \alpha = e^a \Rightarrow e^{12,1863} \Rightarrow a = 196084,3102$. Assim tem-se que o ajuste exponencial é determinado pela função:

$$\varphi(x) = 196091,4407e^{0.0081x}. \tag{29}$$

A função (29) está representada na Figura 2. Ao determinar a função que melhor ajusta o modelo exponencial, pode-se obter uma aproximação pelo wxMaxima. Observou-se que o wxMaxima não apresenta um comando utilizando o método dos mínimos quadrados para o ajuste exponencial, entretanto apresenta um algoritmo $lbfgs$ que usa uma aproximação de baixa classificação da inversa da matriz Hessiana. A aproximação obtida através do algoritmo $L - bfgs$ pelo software wxMaxima é a função:

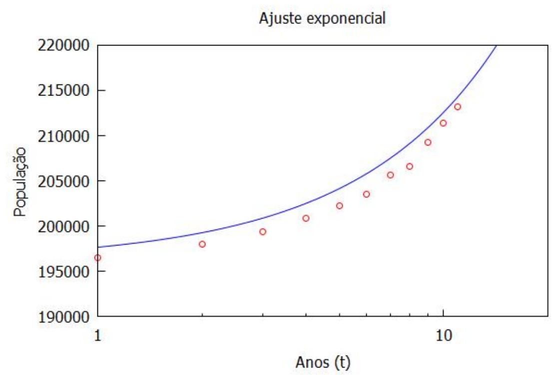

Figura 2. Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (29)

Observa-se que o gráfico produzido pelo wxMaxima, apresenta um deslocamento na origem, o que não descreve o ajuste esperado. O deslocamento ocorre pelo uso da escala logarítmica utilizada para a representação gráfica, uma vez que o logaritmo em zero não está definido.

$$\varphi(x) = 194488,4012e^{0.0081x}. \tag{30}$$

Assim através da função (30), pode-se obter o gráfico (Figura 3).

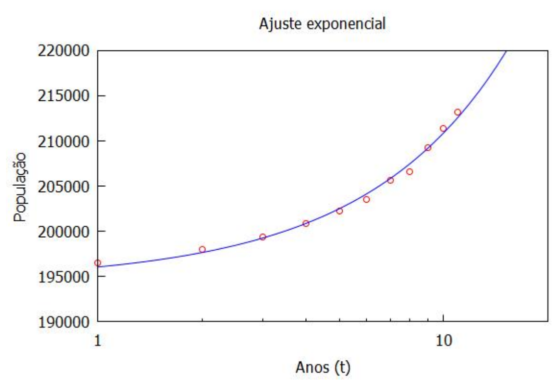

Figura 3. Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (30)

Nas Tabelas III e IV, são apresentadas as estimativas para anos futuros da população de Rio Grande, através das funções (29) e (30).

Tabela III
ESTIMATIVA DA POPULAÇÃO DE RIO GRANDE DA $\varphi(x)$ DADA A FUNÇÃO (29)

Ano	População Real	$\varphi(x) = 196091e^{0.0081x}$	Erro Percentual Relativo
2011	205604	205857	0,12%
2012	206616	207531	0,44%
2013	209223	209219	$1{,}91\times10^{-3}$%
2014	211410	210921	0,23%
2015	213166	212636	0,24%
2016	214532	214365	0,08%
2020	—	221424	—

Tabela IV
ESTIMATIVA DA POPULAÇÃO DE RIO GRANDE DA $\varphi(x)$ DADA A FUNÇÃO (30)

Ano	População Real	$\varphi(x) = 194488e^{0.0081x}$	Erro Percentual Relativo
2011	205604	204174	0,69%
2012	206616	205835	0,37%
2013	209223	207509	0,81%
2014	211410	209196	1,04%
2015	213166	210898	1,06%
2016	214532	212613	0,89%
2020	—	219614	—

D. Ajuste Polinomial

O estudo populacional entre os anos propostos é representado por um polinômio de décimo grau, pois entre todos os graus dos polinômios estudados foi o que melhor se ajustou ao estudo. Essa afirmação deve-se ao fato de que o polinômio de grau dez apresenta o menor erro residual Tabela V.

Definindo-se por φ_n ($n \in \mathbb{N}$), o polinômio de grau n que interpola $n+1$ pontos, então a função (32) é o polinômio que interpola os dados da Tabela I que é composta por 11 dados, e denotamos $n := 10$.

Considerando os polinômios para $n < 10$, em particular $n \in \{2, 6, 9\}$:

$$\varphi_2(x) = 108,1002x^2 + 92,1794x + 582.8671$$

$$\begin{aligned}\varphi_6(x) &= 2,0249x^6 - 67,6626x^5 + 813,1107x^4 - 4235,1786x^3\\ &+ 9024,6124x^2 - 5023,5953x + 299,2698\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_9(x) &= 0,3665x^9 - 15,3054x^8 + 264,6245x^7 - 2451,8238x^6\\ &+ 13149,1244x^5 - 41062,6735x^4 + 71140,0931x^3\\ &- 60841,3867x^2 + 20444,7999x + 247,4709\end{aligned}$$

Define-se ainda por ϵ_n o erro residual referente a φ_n para cada $n \in \mathbb{N}$, e nesse caso $n \le 10$.

Na Tabela V é feita a análise do erro residual que define o melhor modelo polinomial. Quanto mais próximo de 0 (zero) for o valor de ϵ_n, melhor é o ajuste.

Tabela V
ERRO RESIDUAL DOS POLINÔMIOS

n	ϵ_n
2	$1,377376435685527 \cdot 10^7$
6	$4,207197169140837 \cdot 10^6$
9	$1,074255000228874 \cdot 10^5$
10	$4,149415269549128 \cdot 10^{-13}$

Neste caso tem-se que, o erro residual do polinômio que melhor ajusta os dados é $\epsilon_{10} = 4,149415 \cdot 10^{-13}$.

Aplicando a teoria matemática, seção III - A.2), para determinar um polinômio qualquer, efetuam-se os cálculos matriciais necessários para chegar à equação (31). A partir dos dados tem-se:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8 & \dots & 1024\\ 1 & 3 & 9 & 27 & \dots & 59049\\ 1 & 4 & 16 & 64 & \dots & 1048576\\ 1 & 5 & 25 & 125 & \dots & 9765625\\ 1 & 6 & 36 & 216 & \dots & 60466176\\ 1 & 7 & 49 & 343 & \dots & 282475249\\ 1 & 8 & 64 & 512 & \dots & 1073741824\\ 1 & 9 & 81 & 729 & \dots & 3486784401\\ 1 & 10 & 100 & 1000 & \dots & 10000000000 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 196482\\ 197974\\ 199409\\ 200878\\ 202218\\ 203558\\ 205604\\ 206616\\ 209223\\ 211410\\ 213166 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\\ \alpha_7\\ \alpha_8\\ \alpha_9\\ \alpha_{10} \end{pmatrix}.$$

Efetuando a multiplicação obtém-se:

$$X^T f = \begin{pmatrix} 2246538 \\ 11414158 \\ 80484960 \\ 635289472 \\ 5336897412 \\ 46625922568 \\ 418433600820 \\ 3828994181992 \\ 35557859251092 \\ 334016357388328 \\ 3166460547628980 \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema $X^T X\alpha = X^T f$ será:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 196482 \\ -21901.2440 \\ 65117.6117 \\ -72630.2423 \\ 43382.6784 \\ -15490.7217 \\ 3461.6144 \\ -487.7681 \\ 42.0537 \\ -2.0237 \\ 0.0416 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Obtendo-se assim a expressão de décimo grau, que melhor modela os dados:

$$\begin{aligned} \varphi_{10}(x) &= 0,041x^{10} - 2,023x^9 + 42,053x^8 - 487,768x^7 \\ &+ 3461,614x^6 - 15490,721x^5 + 43382,678x^4 \\ &- 72630,242x^3 + 65117,611x^2 \\ &- 21901,244x + 196482. \end{aligned} \quad (32)$$

Assim pode-se analisar a representação gráfica do modelo polinomial conforme a função (32).

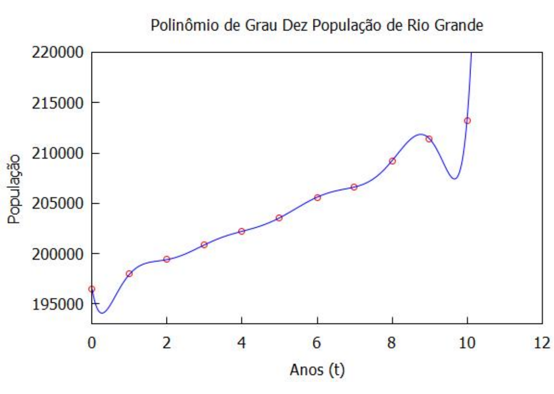

Figura 4. Modelo Polinomial para População de Rio Grande

A partir da Figura 4 pode-se verificar que o polinômio de décimo grau é o que melhor se ajusta ao nosso modelo.

Na Tabela VI é apresentada uma estimativa para a população de Rio Grande. Observa-se que apesar do polinômio de grau 10 ser o que melhor ajusta os pontos, ele não pode ser utilizado para estimar a população do município de Rio Grande, pois $\lim_{x\to+\infty} \varphi_{10}(x) = +\infty$.

Tabela VI
ANÁLISE DA POPULAÇÃO DE RIO GRANDE PARA OS POLINÔMIOS DE GRAU 2, 6, 9 E 10.

Ano	População Real	$\varphi_2(x)$	$\varphi_6(x)$	$\varphi_9(x)$	$\varphi_{10}(x)$
2011	205604	205446	205218	205432	205604
2012	206616	207240	206957	206714	206616
2013	209223	209136	209080	209186	209223
2014	211410	211119	211434	211418	211410
2015	213166	213204	213166	213165	213166

E. Modelo de Malthus

Nesta seção obtém-se a modelagem matemática para o crescimento populacional de Rio Grande aplicando-se o modelo Malthusiano Discreto.

Utilizando os dados da Tabela I é possível calcular a taxa de crescimento média (relativa) tomando por base a população inicial $P_0 = 196482$ e $P_{10} = 213166$, onde k é dada pela equação (14). Substituindo os dados, obtém-se:

$$k = \sqrt[10]{\frac{213166}{196482}} - 1 \Rightarrow k = 0,008183340053934396, \quad (33)$$

o que nos permite afirmar que a população de Rio Grande, cresceu a uma taxa média de, $0,8183\%$ ao ano nestes dez anos.

Dessa forma aplicando-se a equação (15), a população segundo o modelo Malthusiano Discreto, é dada por

$$P_t = 196482e^{\ln(1,008183)^t}. \quad (34)$$

Após desenvolver os cálculos através do software wxMaxima assumindo-se a função (34), para determinar a população de Rio Grande entre os anos de 2005 e 2015, obtém-se a Tabela VII.

Tabela VII
MODELO POPULACIONAL DA CIDADE DE RIO GRANDE MODELO MALTHUSIANO

Ano	População Real	Modelo Malthus	Erro Percentual Relativo
2005	196482	196482	—
2006	197974	198089	0,058%
2007	199409	199710	0,15%
2008	200878	201345	0,23%
2009	202218	202992	0,38%
2010	203558	204654	0,53%
2011	205604	206328	0,35%
2012	206616	208017	0,67%
2013	209223	209719	0,23%
2014	211410	211435	0,01%
2015	213166	213165	$4,7 \times 10^{-4}$ %

Na Figura 5, representa-se um gráfico obtido a partir do modelo Malthusiano Discreto e os dados referentes à população de Rio Grande. Observa-se que a curva apresenta um comportamento semelhante ao ajuste exponencial. A partir da Tabela VII conclui-se que o maior percentual ocorre para o ano de 2012. Entretanto é um percentual inferior à 1%.

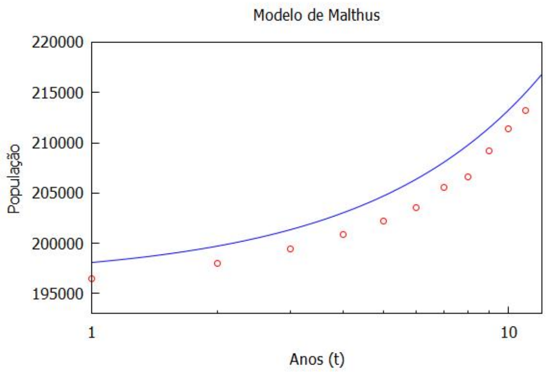

Figura 5. Modelo Malthusiano para População de Rio Grande

Pode-se perceber que o mesmo problema ocorrido na função exponencial acontece no modelo malthusiano, apresentando assim um deslocamento na origem.

Na Tabela VIII apresentam-se as estimativas da população para anos futuros, até o ano de 2030.

Tabela VIII
ESTIMATIVA DOS MODELOS COMPARADOS A POPULAÇÃO REAL DE RIO GRANDE

Ano	População Real	A.E	A.P	M.M[1]
2005	196482	197680	196482	196482
2006	197974	199281	197974	198089
2007	199409	200895	199409	199710
2008	200878	202522	200878	201345
2009	202218	204163	202218	202992
2010	203558	205816	203558	204654
2011	205604	207483	205604	206328
2012	206616	209164	206616	208017
2013	209223	210858	209223	209719
2014	211410	212566	211410	211435
2015	213166	214288	213166	213165
2016	214532	216024	214532	214910
2020	—	223108	—	222032
2025	—	232292	—	231267
2030	—	241853	—	240886

[1]A.E = Ajuste Exponencial, A.P = Ajuste Polinomial, M.M = Modelo de Malthus.

Os modelos estudados mostram resultados próximos da realidade. Para o ano de 2016, por exemplo, o menor erro percentual relativo foi para o Modelo Malthusiano (0,17%). Logo, pode-se concluir que para esta população esse modelo pode ser escolhido para estimar os dados populacionais para mais alguns anos, enquanto os fatores naturais não se tornarem limitantes para o crescimento da população.

V. CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo, analisar o crescimento e decrescimento da população da cidade de Rio Grande, entre os anos de 2005 e 2015, utilizando modelos matemáticos pertinentes ao estudo. Para atingir tal objetivo foram empregados três modelos: exponencial, polinomial e malthusiano.

Foi realizado um estudo aprofundado para identificar qual o modelo que melhor se ajusta aos dados disponibilizados pela plataforma Fundação de Economia e Estatística. O trabalho buscou também identificar o melhor resultado para duas situações: população já estimada e população a estimar. Para uma análise mais detalhada dos resultados foi utilizado o software wxMaxima e seus recursos gráficos e algébricos.

Diante desses aspectos, com a aplicação da metodologia proposta nesse trabalho foi possível estimar, para cada situação, o crescimento da população. Os modelos estudados mostram, em geral, resultados próximos da realidade, mas para o estudo em questão o Modelo Malthusiano pode ser escolhido para estimar os dados populacionais para mais alguns anos. Tais estimativas podem ser úteis para o planejamento da urbanização, desenvolvimento econômico e mercado de trabalho do município.

Cumpre ressaltar que ao efetuar o estudo bibliográfico para a fundamentação teórica deste trabalho, não foram encontradas referências relacionadas à utilização das metodologias propostas, e nem ao menos do software wxMaxima, no estudo populacional de Rio Grande.

Futuramente, pretende-se estudar outros métodos para estimar o valor-limite e metodologias que possam ser aplicadas em populações com modelos de sistemas dinâmicos com competições entre cidades (ou Polos Navais).

REFERÊNCIAS

[1] S.S. Alitolef, *Algumas Aplicações Das Equações Diferenciais*, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Rondônia Campus de JI-PARANÁ, Disponível em: http://www.dmejp.unir.br/menus_arquivos/1787_2011_sergio_alitollef.pdf.

[2] K. Ávila, *Mais 70 trabalhadores do estaleiro Ecovix são demitidos em Rio Grande*, GaúchaZH - Economia, 2017, Disponível em: https://gauchazh.clicrbs.com.br/economia/noticia/2017/08/mais-70-trabalhadores-do-estaleiro-ecovix-sao-demitidos-em-rio-grande-9860999.html

[3] L.C. Barroso, M.M.A. Barroso, F.F.C. Filho, M.L.B. Carvalho and M.L. Maia, *Cálculo Numérico (Com Aplicações)*, São Paulo, Harbra, 1987.

[4] R.C. Bassanezi, *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*, Pinsky Ltda, São Paulo, 2002.

[5] G1 o portal de noticias da Globo, *Audiência pública em Rio Grande busca soluções para polo naval*, Noticias, 2017.

[6] S.F. Martins, *Cidade do Rio Grande: Industrialização e Urbanidade (1873-1990)*, Editora da FURG, 2006.

[7] C.P.R. Moschoutis, *Análise do crescimento populacional brasileiro*, Trabalho de Conclusão de Curso – PUC/ RS, 2013.

[8] E.L.B. Noguez, *Gênese e Transformações do Bairro Cidade Nova no Município do Rio Grande/RS*, Programa de Pós Graduação em Geografia da Universidade Federal do Rio Grande, 2015.

[9] Rio Grande Porto, *Município de Rio Grande*, 2017, Disponível em: http://www.portoriogrande.com.br/site/sobre_porto_municipio_rg.php

[10] B.P. Pugens, J.F. Silva and R.R. Fernandes, *Modelos matemáticos que descrevem o crescimento populacional: aplicados e contextualizados aos dados do município de Osório*, Revista Modelos – FACOS/CNEC Osório, Osório, 2012.

[11] M.A.G. Ruggiero and V.L.R. Lopes, *Cálculo Numérico Aspectos Teóricos e Computacionais*, São Paulo, Pearson Makron Books, 1996.

[12] B.D. Seti, M.F.B. Betencourt, N.T. Oro, R.M.L. Kripka and V.J.L. Muhl, *Estudo da Dinâmica Populacional Usando os Modelos de Malthus e Verhulst: uma Aplicação à População de Passo Fundo*, Revista Teoria e Evidência Econômica, vol. 7, pp. 137-143, 1999.

[13] R. Tavoni, *Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais*, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92412/tavoni_r_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[14] D.G. Zill and M.R. Cullen, *Matemática Avançada para Engenharia Equações diferenciais elementares e transformada de Laplace*, Porto Alegre, Bookman, 2009.