

# Comparação entre o processo de resfriamento da água potável e da não potável: estudo experimental e simulação matemática.

Maria Luiza Kock; Camila Nicola Boeri Di Domenico.

**Resumo:** Para entender a diferença entre o uso da água potável e não potável no meio industrial, é necessário que sejam feitas comparações na eficiência do resfriamento entre esses dois tipos de água. Neste artigo foram coletadas amostras de água potável e não potável onde foram submetidas a um processo de aquecimento em duplicata onde seu resfriamento foi acompanhado durante 50 minutos. Assim foi possível obter os valores da temperatura em relação ao tempo, então foram realizados testes analíticos e depois se utilizou métodos numéricos de Euler e de Runge-Kutta, para que os resultados fossem comparados. Após isso foi desenvolvido para fins de estatística dos dados, o fator de correlação, onde todos os dados obtiveram resultados satisfatórios e muito próximos dos experimentais.

**Palavras-chave:** Fator de correlação; Métodos Numéricos; Resfriamento.

## 1. INTRODUÇÃO

A água é vital para a vida no planeta terra, se caracterizando como o constituinte inorgânico mais abundante na matéria viva, como por exemplo o homem, que possui aproximadamente 60% de seu peso constituído por água e em algumas espécies de animais aquáticos sua porcentagem pode chegar até 98% (Sperling, 2005). A água preenche, segundo Sperling (2005) cerca de 2/3 do planeta terra, sendo que nesses, aproximadamente 97% é proveniente da água do mar, 2,2% das geleiras e 0,8% de água doce onde a subterrânea corresponde a 97% enquanto a superficial (mais fácil de ser extraída) corresponde a 3%.

Maria Luiza Kock é acadêmica do curso de Engenharia Ambiental na UTFPR- Universidade Tecnológica Federal do Paraná campus de Francisco Beltrão.

Camila Nicola Boeri Di Domenico é professora na UTFPR- Universidade Tecnológica Federal do Paraná campus de Francisco Beltrão, no DAFEM -Departamento de Física, Estatística e Matemática.

Devido a esses motivos, demonstra-se a importância de preservar esse tão importante recurso natural disponível em nosso planeta. No entanto devido as grandes interferências antrópicas, esse recurso está sendo cada vez mais poluído, dificultando sua

utilização. Os principais modos de utilizar a água, segundo Sperling (2005) é o abastecimento doméstico e industrial, a irrigação e dessedentação de animais (bebedouros), além da recreação, geração de energia elétrica e entre outros vários usos.

Neste trabalho são abordadas informações sobre o uso da água para o resfriamento em ambiente industrial que tem como objetivo entender a diferença de resfriamento da água limpa e da água de um rio utilizando equações diferenciais numéricas, comparando-se os dados experimentais com o método de Euler e o método de Euler aprimorado e ainda comparando com a solução analítica. E por fim fazer uma análise estatística acerca dos resultados obtidos.

Assim pode-se entender o uso da água limpa em torres de resfriamento. Esse estudo, no entanto, não leva em consideração aspectos relacionados à influência de agentes biológicos e o potencial de corrosão, por exemplo, mas considera apenas a diferença de resfriamento.

## 2. METODOLOGIA

Nesta seção, serão detalhados: (1) obtenção das amostras, (2) obtenção de dados, (3) escolha do modelo matemático e por fim (4) análise estatística.

### 2.1. OBTENÇÃO DAS AMOSTRAS

Para a realização dos experimentos, foram coletadas duas amostras distintas de água: uma de água potável e outra de água sem tratamento. A amostra de água limpa foi retirada de um dos bebedouros da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) no campus de Francisco Beltrão (IMAGEM 1) e será identificada como amostra A. Já a amostra do rio foi obtida com uma garrafa plástica, no Rio Marmeleiro, que fica a cerca de 18Km do Campus da UTFPR (IMAGEM 2) e será identificada como amostra B.

Figura 1- Ponto onde obteve-se amostra A



Fonte: Autor

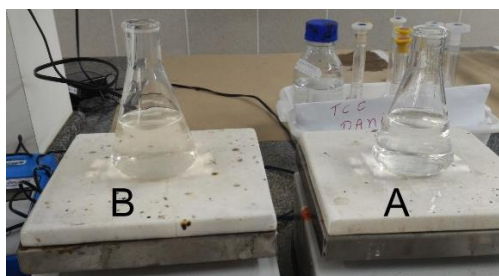
Figura2- Ponto onde obteve-se amostra B



2.2. OBTENÇÃO DOS DADOS

Em laboratório, no mesmo dia que as amostras foram coletadas separaram-se em um Becker, duas amostras, A e B, em duplicata. Depois com um aquecedor, as amostras foram aquecidas a uma determinada temperatura medida em graus Celsius (IMAGEM 3). Então, a cada determinado intervalo de tempo, medido em minutos, foi-se anotando a temperatura de cada amostra, isso se repetiu até o ultimo tempo pré-determinado. Após, foram feitas médias dos dados para obter-se os resultados.

Figura 3- Amostras sendo aquecidas



Fonte: Autor

2.3. ESCOLHA DO MODELO MATEMÁTICO

Para o desenvolvimento do trabalho foram registrados os resultados das temperaturas em relação ao tempo. Com esses resultados foi possível, através da equação de resfriamento de Newton, obter a equação do resfriamento para o experimento. Por isso escolheu-se um modelo matemático que representa a relação entre temperatura e o tempo,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \tag{1}$$

Onde T represente neste estudo a temperatura da água, t é o tempo,  $T_m$  é a temperatura ambiente e k é a constante que será calculada.

Trata-se de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que será resolvida para obter uma função de variáveis que poderá ser substituída pelos valores desejados e assim obterem uma linha de resultados aproximados dos experimentais, para assim poder compará-los

Na forma analítica, para encontrar a equação que mais se aproxima com a realidade foram feitos vários testes com diferentes valores de k através de várias tentativas foi possível chegar ao resultado esperado, utilizando o k médio. Após isso, com o auxílio de uma equação diferencial numérica foi possível obter aproximações da solução dos problemas de valor inicial. Segundo Boyce (2014) os métodos numéricos obtêm uma aproximação precisa da solução de um problema de valor inicial utilizando uma equação diferencial (2) e uma condição inicial (3). A seguir, serão mostrados os dois métodos utilizados para fazer a comparação da aproximação que se obteve em cada método.

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y) \tag{2}$$

Com uma condição inicial

$$y(t_0) = y_0 \tag{3}$$

O método de Euler é utilizado quando a Eq. (2) é linear, para facilitar os cálculos. Esse método é expresso pela equação

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n), \quad n = 0,1,2 \tag{4}$$

Onde, se o tamanho do passo for sempre igual no intervalo calculado a equação (4) será

$$y_{n+1} = y_n + f_n h, \quad n = 0,1,2, \dots \tag{5}$$

Então no presente estudo, a Eq. (5) será utilizada para realizar o cálculo da aproximação, pois o passo é uniforme. O resultado de cada passo será utilizado para calcula o próximo, assim o erro será acumulado em cada passo.

Já o método de Euler aprimorado de ordem 2 que será utilizado neste trabalho, segundo Boyce, é utilizado para aproximar a solução de uma equação diferencial de primeira ordem  $y' = f(x, y)$ . Nesse método utiliza-se uma solução inicial onde se calcula a partir da formula

$$y_{n+1} = y_n + \{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))\} \tag{6}$$

Ou também pode-se utilizar as seguintes equações

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \end{cases} \tag{7}$$

Para facilitar os cálculos são utilizadas Eq.7, onde calcula-se cada K separadamente e depois une-se um uma fórmula só, sendo assim mais difícil de cometer algum erro.

2.4. ANÁLISE ESTATÍSTICA

Para realizar análises estatísticas, foi necessário o auxílio da mesma ferramenta gráfica utilizada para o desenvolvimento das tabelas e dos gráficos. Assim foi determinado o uso do coeficiente de relação, onde tratará de mensurar a relação entre os métodos numéricos e analíticos e os dados do teste experimental. Este teste estatístico mostra o grau percentual da qualidade do ajuste do modelo numérico realizado (Quinino, 2011). A relação não é negativa e é representada por  $r^2$  que é denominado por (Spiegel, 1993):

$$r = \pm \sqrt{\frac{\text{variação explicada}}{\text{variação total}}} \quad (8)$$

Onde,  $r$  é uma quantidade adimensional, ou seja, não depende de unidades de medidas (Spiegel, 1993). A variação explicada significa que os resultados se comportam de maneira casual. É a variação total é a soma dos quadrados dos desvios em relação à média. Os sinais de  $\pm$  representam tanto a correlação linear positiva quanto negativa.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1. OBTENÇÃO DAS AMOSTRAS

Primeiramente, com o auxílio de um becker foram coletados aproximadamente 300mL de água, no local anteriormente especificado na UTFPR no Campus de Francisco Beltrão. Já na segunda amostra foi coletado, no local especificado anteriormente, aproximadamente 300mL de água. Foi possível obter a amostra quando se amarrou uma pedra na ponta de uma corda, juntamente com a garrafa de plástico anteriormente higienizada e foi obtida a amostra.

3.2. OBTENÇÃO DOS DADOS

Em laboratório, separou-se, em duplicata, 100mL de cada amostra e colocou-se em um Becker. Depois com um aquecedor, as amostras foram aquecidas a 100 graus, então, a cada 2 minutos foi-se anotando a temperatura de cada amostra, isso se repetiu até o tempo de 50 minutos. Onde depois de feita uma média simples obteve-se os resultados (FIGURA 4).

Figura 4- Resultados obtidos em 50 minutos de resfriamento

tempo	Média temp. A	Média temp. B
0	100	100
2	92	91,5
4	85,5	85,5
6	81	80,5
8	74,5	76,5
10	72	72,5
12	69	70,5
14	66,5	68
16	64	65
18	62	62,5
20	59,5	60
22	57,5	58
24	55,5	56
26	53	54,5
28	51,5	53
30	49,5	51
32	48	50
34	46,5	48
36	45	47
38	44	46
40	43	45
42	42	44
44	41	43
46	40	41,5
48	38,5	40,5
50	37,5	39

Fonte: Autor

3.3. ESCOLHA DO MODELO MATEMÁTICO

Utilizando a lei de resfriamento de newton (1), observou-se que é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem separável, onde integrando-a seguem os seguintes passos

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{(T-T_m)} = -k \int_0^t dt \quad (9)$$

$$\ln(T - T_m) = -kt + k_0 \quad (10)$$

$$T - T_m = C e^{-kt} \quad (11)$$

Agora essa equação será utilizada nas seguintes aproximações no método analítico, de Euler e no método de Euler aprimorado.

Para o método analítico cabe a seguinte resolução onde deve-se preparar a equação e obter a constante (C), depois desse passo, deve-se obter a constante k, restando assim uma única variável, que no caso dessa equação, essa variável será o tempo.

$$T_m = 18^\circ\text{C}$$

$$T_0 = 100^\circ\text{C}$$

Então

$$100 - 18 = C \times e^{-k \cdot 0}$$

$$C = 82$$

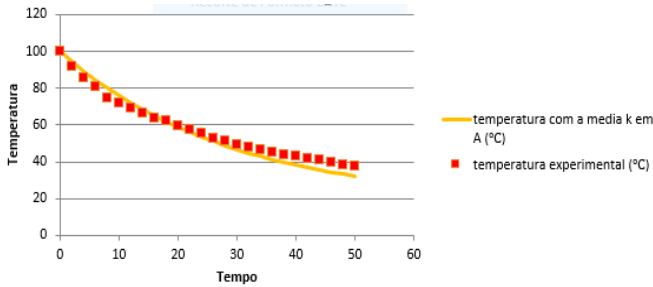
Nesse momento para calcular o k foi utilizado o auxílio de uma ferramenta gráfica, onde após várias tentativas observou-se que o k que representa melhor a curva experimental é o k médio utilizando  $T_2$  de cada temperatura.

Então se obteve a seguinte equação

$$T = 82 \times e^{-0,035t} + 18 \quad (12)$$

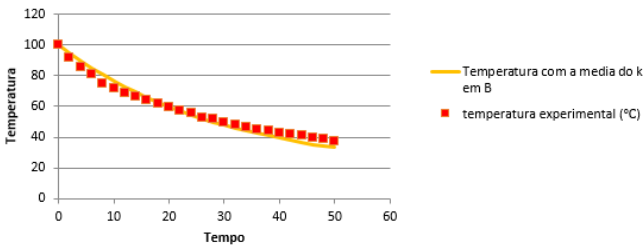
Nos resultados obtidos foi possível perceber grande proximidade entre a temperatura experimental e analítica. Distanciando-se no final pela somatória do erro que se tem (FIGURA 5 e 6).

Figura 5-Comparação dos dados experimentais e dados analíticos da amostra A



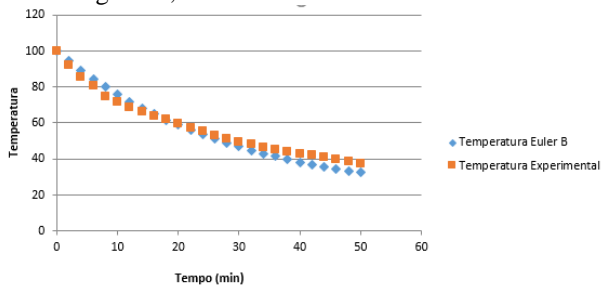
Fonte: Autor

Figura 6-Comparação dos dados experimentais e dados analíticos da amostra B



Fonte: Autor

O método de Euler foi desenvolvido em uma ferramenta gráfica, utilizando o k do método analítico



Fonte: Autor.

Com o método de Euler aprimorado ou método de runge-kutta substituiu-se nas formulas mostradas anteriormente onde se identificou

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2 \\ K_1 = 2f(x_n, y_n) \\ K_2 = 2f(x_n + 1, y_n + K_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \end{cases} \quad (14)$$

E assim com os valores obtidos com o experimento e com o k calculado na fórmula analítica, foram sendo substituídos consecutivamente em cada fórmula.

Assim, observou-se como o erro acumulado interfere nas aproximações no final do cálculo do Euler aprimorado no teste da amostra A. No entanto isso não ocorre no teste da amostra B através da observação gráfica, isso pode ter ocorrido devido a maior distância observada no começo do experimento e como o erro foi acumulado as temperaturas se aproximaram no final (IMAGEM 9 e.10).

Figura 9-Comparação dos dados experimentais e dados do método de Euler aprimorado da amostra A.

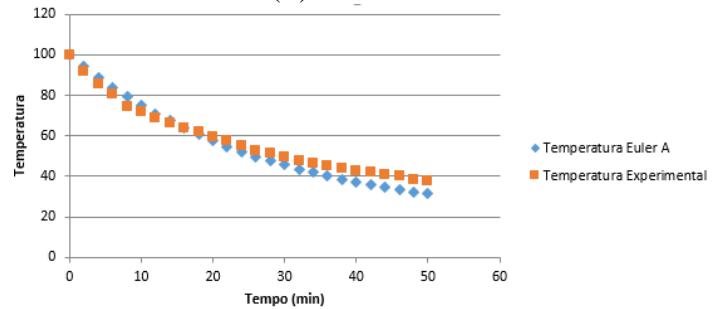
foi possível substituir a formula e então foram obtidos os seguintes resultados. Com as devidas substituições utilizou-se a formula

$$y_{n+1} = y_n + 2(-k \times T) \quad (13)$$

Onde se pode interpretar que T é a temperatura,  $y_n$  é a condição inicial h é o passo, que neste trabalho é igual a dois, pois o passo é uniforme e o k foi calculado anteriormente na sua forma analítica para ambas as amostras A e B.

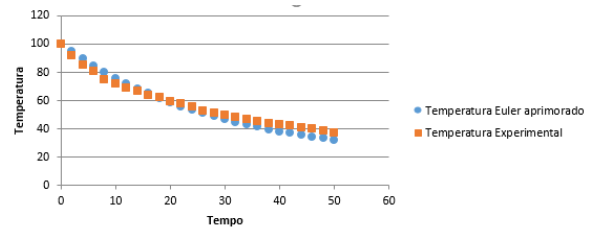
Assim com os cálculos feitos em cada uma das amostras se percebe a diferença entre as duas onde as melhores aproximações se localizam entre os tempos 10-20 em cada uma das amostras (IMAGEM 7 e 8)

Figura 7-Comparação dos dados experimentais e dados do método de Euler (A).



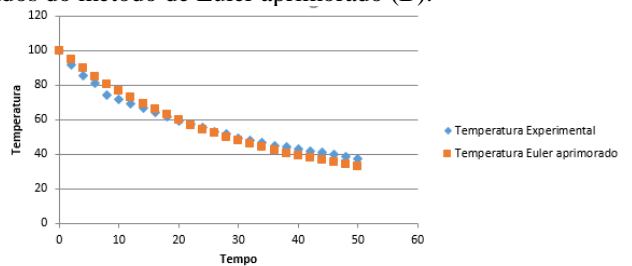
Fonte: Autor.

Figura 8-Comparação dos dados experimentais e dados do método de Euler (B).



Fonte: Autor.

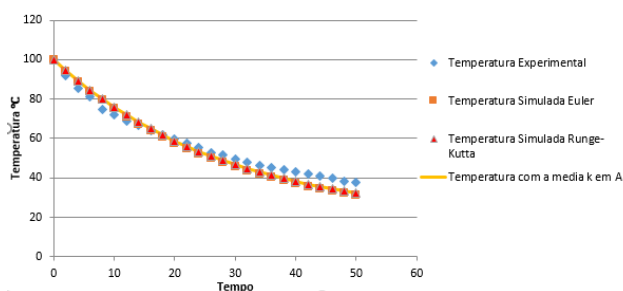
Figura 10-Comparação dos dados experimentais e dados do método de Euler aprimorado (B).



Fonte: Autor.

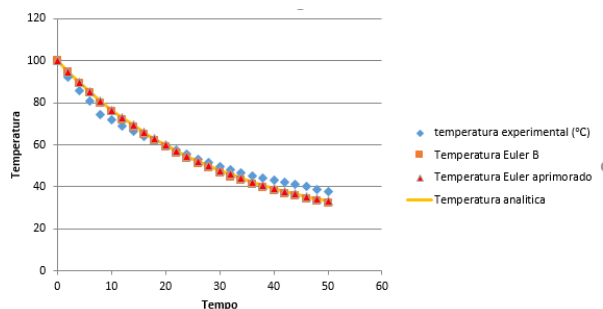
Por fim, com a representação de todos os métodos realizados neste trabalho percebe-se que as simulações tanto na amostra A quanto na amostra B foram próximas e satisfatórias. (IMAGEM 9 e 10). No entanto a amostra B apresenta maior diferença visível entre os dados obtidos, principalmente no método de Euler aprimorado.

Figura 11-Comparação final entre todos os métodos calculados (A).



Fonte: Autor.

Figura 12-Comparação final entre todos os métodos calculados (B)



Fonte: Autor

### 3.4. ANÁLISES ESTATÍSTICAS

Segundo os dados obtidos foi possível calcular o coeficiente de relação entre os dados experimentais e os dados obtidos através dos métodos numéricos com a linha de tendência em sua forma exponencial obteve-se os seguintes resultados.

Modelo testado	Coeficiente de correlação amostra A	Coeficiente de correlação amostra B
Analítico	0,99622	0,99577
Euler	0,99664	0,9962
Euler Aprimorado	0,99623	0,99576

Assim percebe-se que todas as medidas do coeficiente foram satisfatórias, tendo como melhor resultado a amostra A do método de Euler.

### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram retiradas amostras de água potável, no Campus da UTFPR e água de um rio (não potável), na cidade de Marmeleiro e foram analisadas as diferenças de resfriamento utilizando equações diferenciais numéricas de primeira ordem no método analítico, método de Euler e de Runge-Kutta de segunda ordem (Euler Melhorado). Cada um dos métodos apresentou dados muito próximos com os dados obtidos em laboratório. No entanto o método de Euler foi mais aproximado na amostra A.

Este trabalho foi realizado para comparar as diferenças entre os resfriamentos das amostras e como

isso poderia ser aplicado na indústria, onde foi mostrado que as diferenças entre os dois resfriamentos não são muito diferentes e então seria mais interessante economicamente utilizar água não potável para uso industrial, pois assim a empresa poderia economizar no tratamento da água. No entanto vale lembrar que este artigo não estuda os possíveis agentes biológicos e o potencial de corrosão presentes na água não potável.

### REFERÊNCIAS

- 1) BOYCE, William E; Richard C. DiPrima. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Rio de Janeiro. LTC. 2014. ÇENGEL
- 2) QUININO, Roberto C. et al. O Coeficiente de Determinação R<sup>2</sup> como Instrumento Didático para Avaliar a Utilidade de um Modelo de Regressão Linear Múltipla -Departamento de Estatística – ICEX – UFMG – Brasil;2011.
- 3) SPERLING, Marcos. Introdução à qualidade das águas e ao tratamento de esgotos- 3 ed.- Belo Horizonte: Departamento de Engenharia Sanitária e Ambiental; Universidade Federal de minas gerais;2005.
- 4) SPIEGEL, Murray R. Estatística, 3. Ed.; tradução e revisão técnica Pedro Consentino- São Paulo: Pearson Makron Books, 1993.