Identificação Paramétrica de Dados Antropométricos de Paciente Paraplégicos Através do Método dos Mínimos Quadrados

Leandro Guerra, Ruberlei Gaino

***Abstract*—A motivação do estudo de identificação de sistemas neste trabalho consiste no fato de que freqüentemente não são conhecidas as equações envolvidas em um determinado sistema – ou seriam impossíveis de serem determinadas, devido aos fatores tempo e recurso. Deste modo, tem-se o estudo e a implementação do método dos mínimos quadrados apresentado como um método para auxiliar na identificação da função de transferência que modela o movimento da perna de um paciente paraplégico. Este estimador será apresentado como sendo o resultado natural de tentar levar em consideração as incertezas de medição em um conjunto de dados e seu resultado apresenta o valor de um vetor, que contém os parâmetros da função de transferência a ser identificada. Tal vetor é o argumento que minimiza a função de custo J cuja definição é o somatório quadrado dos erros entre o valor estimado e o valor real. Em seguida, serão estudados e implementados os modelos ARMA (autoregressive moving average) e ARMAX (autoregressive moving average with exogenous inputs), nos quais a estimação dos parâmetros de cada um dos modelos será realizada através do método supracitado. O resultado é a estimação dos parâmetros da função de transferência obtida com dados práticos extraídos da antropometria de um paciente paraplégico, onde é destacada a verossimilhança entre a função de transferência estimada e a função de transferência proposta no modelo matemático para controle da perna de pacientes paraplégicos.**

Palavras-chave — Identificação de sistemas. Mínimos quadrados. Arma. Armax. Pacientes Paraplégicos.

I. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de fenômenos físicos podem assumir inúmeros formatos. Dependendo do sistema que se deseja modelar, e de acordo com suas circunstâncias particulares, existirá uma interpretação matemática que será mais adequada ao seu contexto do que outra. Como exemplifica [1], em problemas de controle ótimo, é mais adequado utilizar representações no espaço de estados. Já se o estudo em questão é sobre uma resposta transitória ou a resposta em freqüência de sistemas, é mais conveniente utilizar representações através de função de transferência. Assim, para a solução de um problema, considera-se desejável construir inicialmente um modelo simplificado de modo a se adquirir um conhecimento básico e geral para a solução.

Assumindo a definição acima, temos que "estimação é a determinação de grandezas físicas não observáveis a partir de grandezas mensuráveis" [2]. Mesmo que qualquer modelo estimado não seja capaz de representar todas as suas características, o que importa é que ele seja capaz de modelar os comportamentos dominantes deste sistema. Por exemplo, um modelo linearizado que seja capaz de descrever uma determinada planta não-linear em um ponto de operação específico em que ela trabalhe é um dado necessário para que um controlador para a mesma seja projetado [2,3,4,5].

Desta forma, este trabalho aborda a identificação de modelos através da análise dos seus dados de entrada e saída, que é conhecida como identificação ou modelagem "caixa preta" [2,6,7].

A. *Identificação de Sistemas*

A identificação de sistemas é de suma importância para se conhecer o comportamento da variável em evidência, mesmo que não seja inicialmente conhecida a equação que descreve o sistema. Através da técnica de identificação é possível estimar os parâmetros que a integram, modelando a função de transferência a partir de observações da saída do sistema e dos dados de entrada que o compõe. Toda esta metodologia é empregada principalmente para o projeto de controladores, que consistem em sistemas analógicos, digitais e que determinarão o comportamento da variável manipulada.

De acordo com [2] existem 5 etapas fundamentais de um problema de identificação, que são:

1. testes dinâmicos e coletas de dados: é necessário coletar ou gerar dados para a identificação dos modelos;
2. escolha da representação matemática a ser usada: no caso do presente trabalho, serão usadas as representações ARMA e ARMAX;
3. determinação da estrutura do modelo: os modelos usados serão do tipo linear, e a escolha de sua estrutura está relacionada basicamente à escolha do número de pólos e zeros;
4. estimação de parâmetros: o algoritmo a ser utilizado será o dos mínimos quadrados.
5. validação do modelo: obtido este, é fundamental

Artigo recebido em 08/11/2010.

Leandro Guerra é aluno de graduação da Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná. (e-mail: eng.leandroguerra@gmail.com).

Ruberlei Gaino é Professor Doutor da Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Engenharia Elétrica, Londrina, Paraná.
(e-mail: rgaino@uel.br).

verificar se eles possuem ou não as características de interesse do sistema original, que no presente estudo é a função de transferência do modelo matemático para controle da perna de pacientes paraplégicos.

Os algoritmos em estudo – ARMA e ARMAX – são representações matemáticas de funções de transferência que regem o comportamento de um determinado sistema. Neste ponto é introduzida a estimação dos parâmetros de tais funções através do método dos mínimos quadrados. Este, por sua vez, é um dos mais conhecidos e utilizados em diversas áreas do conhecimento. Gauss em suas observações astronômicas mencionou que o valor mais provável de grandezas desconhecidas é o que minimiza a soma dos quadrados da diferença entre o valor medido e o valor calculado, ponderado pelo grau de precisão da medida.

II. PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

A. O Estimador de Mínimos Quadrados

Em princípio, para facilitar o entendimento da estimação de parâmetros, é definido neste ponto, baseado em [2], a montagem e solução de um sistema de equação com solução única. Posteriormente, será abordado o caso sobredeterminado, ondá há um número de equações superior ao número de incógnitas [2,3,4,5].

Partindo do sistema de solução única, seja uma função $y = f(x)$. Se aplicada para distintos valores de x, tem-se:

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1), \\ y_2 &= f(x_2), \\ &\vdots \\ y_N &= f(x_N). \end{aligned} \quad (1)$$

Tratando $f(x)$ vetorialmente, esta é parametrizada por um vetor de n parâmetros, identificado como Θ. Assim,

$$y = f(x, \Theta). \quad (2)$$

Sendo conhecidos os conjuntos de x e y, $f(x)$ linear e tomado o número de restrições de (2) idêntico ao número de elementos de Θ, as n restrições podem ser escritas matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \left[x_1 x_2 \cdots x_n \right] = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix},$$

$$Y = X\Theta. \quad (3)$$

Em (3) $X \in IR^{n \times x}$, y é a variável dependente dos regressores $x_1, \cdots, x_n$, que são também chamados de variáveis independentes e Θ é o vetor de parâmetros a ser identificado. Sendo X não singular,

$$\Theta = X^{-1} Y. \quad (4)$$

Entretanto, se $N > n$ restrições de (4) forem tomadas, tem-se o caso de sobre-determinação. Neste, a matriz X não é quadrada e, portanto, não inversível. Com algumas manipulações matemáticas, tem-se:

$$X^T Y = X^T X \Theta. \quad (5)$$

Lembrando que o produto de uma matriz por sua transposta é uma matriz quadrada, pode-se reorganizar (5) como

$$\Theta = \left[X^T X \right]^{-1} X^T Y, \quad (6)$$

e a matriz $\left[X^T X \right]^{-1} X^T$, é conhecida como matriz pseudo-inversa.

B. Estimação de Parâmetros por Mínimos Quadrados

Definida a equação (6), que possui infinitas soluções, o método dos mínimos quadrados busca uma solução que produza o menor erro possível para o sistema. Assumindo que o valor estimado do vetor de parâmetros $\hat{\Theta}$ seja conhecido, e que existe um erro ξ associado ao valor observado y a partir do vetor de regressores x e de $\hat{\Theta}$ tem-se [2,3,4,5],

$$y = x^T \theta + \xi. \quad (7)$$

Tomando $N > n$ aplicações, onde N é o número de elementos de x e n é o número de elementos de $\hat{\Theta}$, tem-se de forma matricial,

$$Y = X^T \cdot \hat{\Theta} + \mathrm{E}. \quad (8)$$

Como dito anteriormente, há uma situação onde existem infinitas soluções e deve-se encontrar uma solução que minimize o erro. Desta forma, de uma maneira mais precisa, deve-se encontrar um vetor $\hat{\Theta}$ de tal sorte que minimize o somatório do quadrado dos erros. Este somatório é a função de custo que quantifica a qualidade de ajuste de $X\hat{\Theta}$ ao vetor de dados Y, e é dada por:

$$J_{MQ} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}(i)^2 = \left\| \mathrm{E} \right\|^2. \quad (9)$$

Substituindo ξ da equação (8) em (9) tem-se,

$$J_{MQ} = \left(Y - X\hat{\Theta}\right)^T \left(Y - X\hat{\Theta}\right). \quad (10)$$

Como o objetivo é minimizar J_{MQ} em relação à $\hat{\Theta}$, deve-se fazer $\frac{\partial J_{MQ}}{\partial \hat{\Theta}} = 0$. Desta forma,

$$\frac{\partial J_{MQ}}{\partial \hat{\Theta}} = -\left(Y^T X\right)^T - X^T Y + \left(X^T X + X^T X\right)\hat{\Theta},$$

$$\frac{\partial J_{MQ}}{\partial \hat{\Theta}} = -X^T Y - X^T Y + 2X^T X\hat{\Theta}. \quad (11)$$

Igualando (11) a zero, tem-se

$$\hat{\Theta} = \left[X^T X\right]^{-1} X^T y. \quad (12)$$

equação esta que é idêntica à equação (8). Derivando novamente a equação (11) em relação à $\hat{\Theta}$, é encontrado um valor para que $\hat{\Theta}$, além de minimizar J_{MQ}, também é o valor mínimo possível. Portanto,

$$\frac{\partial^2 J_{MQ}}{\partial \hat{\Theta}^2} = 2X^T X\Theta > 0. \quad (13)$$

É então, possível concluir que:

$$\hat{\theta}_{MQ} = \arg_\theta \min J_{MQ} = \left[X^T X\right]^{-1} X^T Y. \quad (14)$$

C. Ortogonalidade no Estimador de Mínimos Quadrados

Esta propriedade é utilizada para verificar que, utilizando o estimador MQ, a distância entre os valores medidos e estimados de saída é a menor possível. Como o objetivo é encontrar um $\hat{\Theta}$ que minimiza J_{MQ} e $J_{MQ} = \sum_{i=1}^{N} \xi(i)^2 = \|\xi\|^2$, deve-se ter $\|\xi\|$, o menor possível.

Em outras palavras, quando $\hat{\Theta}$ é estimado por MQ, $\hat{y}$ e ξ devem ser ortogonais [2].

De acordo com o anexo A, item 1.3 de [2], "dois vetores $X \in IR^n$ e $Y \in IR^n$ são ortogonais se $X^T Y = 0$". Lembrando que e $\hat{Y} = \hat{\Theta}_{MQ}^T X^T$ tem-se,

$$Y^T \mathrm{E} = \hat{\Theta}_{MQ}^T X^T Y\left(y - X\hat{\Theta}_{MQ}\right), \quad (15)$$

e

$$Y^T \mathrm{E} = \left\{\left[X^T X\right]^{-1} X^T Y\right\}^T X^T \left(Y - X\left[X^T X\right]^{-1} X^T Y\right),$$

$$Y^T \mathrm{E} = Y^T X\left[X^T X\right]^{-1} X^T \left(Y - X\left[X^T X\right]^{-1} X^T Y\right),$$

$$Y^T \mathrm{E} = Y^T X\left[X^T X\right]^{-1} X^T Y - Y^T X\left[X^T X\right]^{-1} X^T X\left[X^T X\right]^{-1} X^T Y,$$

$$Y^T \mathrm{E} = 0. \quad (16)$$

como queria se demonstrar [2,3,4,5].

A propriedade da ortogonalidade também pode ser verificada graficamente, de acordo com a Figura 1, onde é possível verificar a propriedade para $\hat{y}$ e ξ.

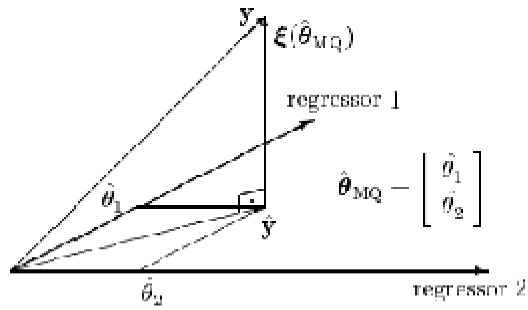

Fig. 1. Ortogonalidade no estimador de mínimos quadrados [2].

D. O Caso da Polarização de Estimadores

Durante a obtenção do conjunto de dados para estimação, haverá influência do ruído, chamado de ruído de medição. Este ruído será a diferença entre o valor estimado da saída e o valor real medido do sistema [2].

A sua grande influência consiste em alterar a propriedade da ortogonalidade presente no método dos mínimos quadrados, sendo que esta garante que se tenha $\|\mathrm{E}\|$, o menor possível, ou seja, $\hat{\Theta}$ escolhido é aquele que garante o menor valor possível para a função de custo J_{MQ}.

A polarização pode então ser definida como,

$$b = E\left[\hat{\Theta}\right] - \Theta. \quad (17)$$

sendo Θ, é um vetor de parâmetros e $\hat{\Theta}$, é o seu valor estimado [2,3,4,5].

Assim, utilizando o estimador MQ, o vetor de resíduos será $\mathrm{E} = Y - \hat{Y} = Y - \Psi\hat{\Theta}_{MQ}$. Deste modo,

$$\mathrm{E} = Y - \Psi\hat{\Theta}_{MQ},$$

$$\mathrm{E} = \Psi\Theta + e - \Psi\hat{\Theta}_{MQ},$$

$$\mathrm{E} = \Psi\left(\Theta - \hat{\Theta}_{MQ}\right) + e, \qquad (18)$$

onde e é o ruído de medição adicionado ao sistema. Devido à propriedade da ortogonalidade, os resíduos devem ser ortogonais aos regressores. Com isso,

$$\Psi^T \mathrm{E} = 0. \qquad (19)$$

e a polarização no método dos mínimos quadrados fica como em [2]:

$$b_{MQ} = \left[\Psi^T \Psi\right]^{-1} E\left[\Psi^T e\right]. \qquad (20)$$

A influência da polarização no estimador MQ pode ser verificada na Figura 2 abaixo. É possível notar que o ruído altera significativamente o valor dos parâmetros Θ, desviando-os da projeção de y.

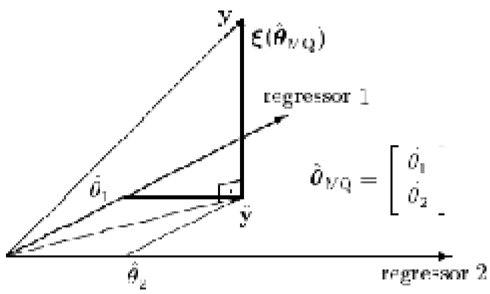

Fig. 2. Ausência de ortogonalidade no estimador MQ devida à polarização [2].

E. Tratamento da Polarização: o Estimador Estendido de Mínimos Quadrados

Foi visto em [2,3,4,5] que quando os valores de entrada e saída são polarizados, não há ortogonalidade, e um complemento ao algoritmo é necessário para dar seguimento à estimação. Tal complemento é o chamado estimador estendido de mínimos quadrados , o qual contorna o problema da polarização.

O EMQ consiste em estender a matriz de regressores Ψ fazendo com que nela sejam incluídos novos regressores, a cada iteração para reduzir o efeito do ruído. Desta forma, o EMQ e sua iterações é descrito como se segue em [2]:

1. a partir da equação de regressão $y(k) = \Psi^T(k-1)\Theta + e(k)$, e dos dados disponíveis, estime Θ;
2. calcule o vetor de resíduos $\mathrm{E}_1 = Y - \Psi\hat{\Theta}$;
3. faça i = 2 (segunda iteração);
4. com E_{i-1}, monte a matriz estendida de regressores Ψ_i^*, e estime $\hat{\Theta}_{EMQi} = [\Psi_i^{*T}\Psi_i^*]^{-1}\Psi_i^{*T} Y$;
5. Determine o vetor de resíduos $\mathrm{E}_i = Y - \Psi_i^* \hat{\theta}_{EMQi}^*$;
6. Facão i = i + 1 e volte ao passo 4. Repita até convergir.

Em [2] encontra-se que a convergência sugerida no passo 6 acontece entre a 3ª e 10ª iteração de i. Mais precisamente, a convergência acontece quando a polarização deixa de existir, ou seja, quando a equação (17) torna-se igual a zero.

F. Modelo Matemático Para Controle da Posição da Perna de Pacientes Paraplégicos

O modelo estudado para a obtenção dos dados práticos para uso nos algoritmos ARMA e ARMAX, é a função de transferência [6,7],

$$H(s) = \frac{G}{1 + s\tau}, \qquad (21)$$

que consiste na relação do torque ao qual o músculo da perna está sujeito, com a largura de pulsos da estimulação elétrica na perna do paciente [6,7]. Na Figura 3 a seguir ilustra o modelo mecânico do complexo canela-tornozelo do corpo humano.

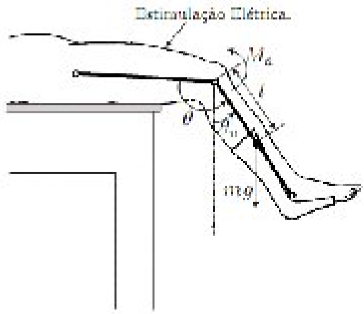

Fig. 3. Modelo mecânico canela-tornozelo [6,7].

As variáveis exibida na figura são:

- Ma: torque ativo do joelho;
- θ: é o ângulo comum do joelho (ângulo entre a canela e a coxa no plano sagital);
- θ_v: é o ângulo da canela (entre o sentido vertical no plano sagital);
- l: é a distancia do joelho e o centro de massa do complexo canela-pé;
- mg: massa do complexo canela-pé multiplicada pela aceleração da gravidade;

O ponto de operação determinado com $\theta_v = 30^o$ e os valores das grandezas antropométricas G e τ são, respectivamente, 42500[*Nm/s*] e 0.951(s), valores obtidos em [6,7] .

Utilizando o *Simulink* do *software MatLab*®, foi aplicado um degrau na entrada da função de transferência ,

$$H(s) = \frac{444,557}{1 + 0,98954s}, \tag{22}$$

e gerado dos vetores de entrada e saída que serão utilizados para o teste e validação dos algoritmos desenvolvidos. Na Figura 4 é possível observar o diagrama de blocos construído com o auxílio do *software Simulink*.

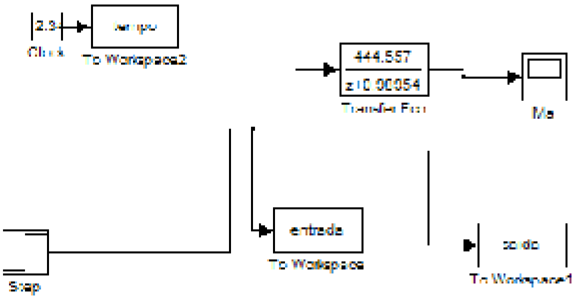

Fig. 4. Diagrama de blocos no Matlab/Simulink para aquisição dos dados para estimação.

A seguir, serão demonstrados os algoritmos ARMA e ARMAX para a identificação de sistemas no caso do paciente paraplégico.

III. ALGORÍTMOS DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

A. O Modelo ARMA – Auto Regressive Moving Average

Seja a função de transferência de um modelo genérico onde U(z) é a entrada e Y(z) é a saída. Disto, tem-se um sistema descrito pela seguinte função de transferência [2,3,4,5],

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_n}{z^n - a_1 z^{n-1} - \ldots - a_n}. \tag{23}$$

e pela seguinte equação diferencial,

$$\begin{aligned} y(k) &= a_1 y(k-1) + a_2 y(k-1) + \ldots + a_n y(k-n) \\ &\quad + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + b_n u(k-n). \end{aligned} \tag{24}$$

Este modelo é referido como ARMA (do inglês, autoregressive moving average). Para este modelo, o objetivo é encontrar o vetor de coeficientes,

$$\Theta = (a_1 a_2 .. b_1 b_2 .. b_n). \tag{25}$$

O modelo ARMA é um caso particular do modelo ARMAX, porque não há sinais de entrada exógenos [2,3,4,5].

Para ilustrar o processo de identificação, seja uma função de transferência de primeira ordem, dada por:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_1}{z - a_1}.$$

Assim, a equação diferencial chega-se a,

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1).$$

e então,

$$\begin{aligned} y(1) &= a_1 y(0) + b_1 u(0) + e(1), \\ y(2) &= a_1 y(1) + b_1 u(1) + e(2), \\ y(3) &= a_1 y(2) + b_1 u(2) + e(3), \end{aligned}$$

Matricialmente, tem-se

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0)\,u(0) \\ y(1)\;u(1) \\ y(2)\,u(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \end{bmatrix},$$

$$Y(3) = F(3)\Theta + E(3). \tag{26}$$

Aplicando então os conceitos de mínimos quadrados na equação (24) e considerando o número de restrições maior que o número de parâmetros de estimação $N > n$, defini-se um vetor $f(k)$ tal que,

$$f^T(k) = \left[y(k-1) y(k-2) \cdots y(k-n) u(k-1) \cdots u(k-n) \right]. \tag{27}$$

De acordo com a equação (26),

$$Y(N) = F(N)\Theta + E(N). \tag{28}$$

A função de custo de mínimos quadrados é estruturada como,

$$J_{MQ} = \sum_{k=n}^{N} E^2(k) = E^T(N) E(N). \tag{29}$$

Assim, de (28) e (29),

$$J_{MQ} = \left[Y - F\Theta \right]^T \left[Y - F\Theta \right] = Y^T Y - \Theta^T F^T Y - Y^T F\Theta + \Theta^T F^T F\Theta,$$

$$J_{MQ} = Y^T Y - 2\Theta^T F^T Y + \Theta^T F^T F\Theta. \tag{30}$$

Minimizando a equação (30),

$$\frac{\partial J_{MQ}}{\partial \Theta} = -2F^T Y + 2F^T F\Theta = 0. \tag{31}$$

Portanto, o vetor de parâmetros estimados através do método dos mínimos quadrados pelo modelo ARMA é,

$$\hat{\Theta}_{MQ} = \left[F^T(N) F(N) \right]^{-1} F^T(N) Y(N). \tag{32}$$

como demonstrado em [2].

B. O Modelo ARMAX – Auto Regressive Moving Average Wtih Exogenous Entry

De acordo com as definições anteriores deste trabalho, se era considerado que os dados de entrada e saída para estimação já eram conhecido a priori. Assim, o problema de estimação era resolvido em batelada, ou seja, de uma só vez. Entretanto, existem situações em que os dados para estimação só são conhecidos a posteriori ou disponibilizados em sequência. Então, para atingir este objetivo, é usado um procedimento conhecido como estimação recursiva, e para análise deste caso, será utilizado o algoritmo ARMAX.

Segundo Aguirre (2007) o modelo ARMAX pode ser obtido considerando a equação (33),

$$\mathrm{A}(q)y(k) = B(q)u(k) + \mathrm{C}(q)\nu(k), \qquad (33)$$

ou reescrevendo a equação (33),

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}\nu(k). \qquad (34)$$

Então, toma-se como ponto de partida o modelo. Deseja-se estimar de forma recursiva. Para isso, o estimador MQ será escrito da seguinte forma

$$\hat{\Theta}_{MQk} = \left[\sum_{i=1}^{k}\psi(i-1)\psi^{T}(i-1)\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k}\psi(i-1)y(i)\right]^{-1}. \qquad (35)$$

Para Aguirre (2007) uma forma de implementar o estimador recursivo estendido de mínimos quadrados é a seguinte:

$$\left\langle \begin{aligned} K_k &= P_{k-1}\psi_k\left[\psi_k^T P_{k-1}\psi_k + 1\right]^{-1}, \\ \hat{\Theta}_k &= \hat{\Theta}_{k-1} + K_k\left[y(k) - \psi_k^T\hat{\Theta}_{k-1}\right], \\ P_k &= P_{k-1} - K_k\psi_k^T P_{k-1}, \\ \zeta(k) &= y(k) - \psi_k^T\hat{\Theta}_k. \end{aligned} \right. \qquad (36)$$

Sendo que, na primeira iteração, não contém resíduos. A última equação no estimador é utilizada para calcular o resíduo na iteração k e com ele atualizar o vetor de regressores.

A matriz P_k é uma matriz de covariância que indica o grau de confiança que se tem nos valores estimados dos elementos de $\hat{\Theta}_k$. Quanto maior for a confiança em um determinado valor, tanto menor será o valor correspondente na diagonal principal de P_k. Assim é lógico imaginar que a matriz P_0 deva ser iniciada com valores elevados, da ordem de 10^5 . Já a matriz K_k é uma matriz de ganhos cujo objetivo é garantir uma boa estimativa para $\hat{\Theta}_k$.

Uma característica de algoritmos recursivos, é que valores previamente estimados podem ser utilizados para inicializá-los. Assim, neste trabalho, o vetor estimado dos parâmetros $\hat{\Theta}$ obtido com o algoritmo ARMA, será utilizado como valor inicial para o ARMAX [2,3,4,5].

A idéia básica no desenvolvimento acima é a de expressar grandezas em um determinado instante (k) em função de valores em instantes passados.

IV. IMPLEMENTAÇÃO DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO

A. Implementação do Modelo ARMA

O objetivo deste processo é identificar a função de transferência de primeira ordem descrita na equação (22),

$$H(s) = \frac{444,557}{1 + 0,98954s},$$

que consiste na relação do torque ao qual o músculo da perna está sujeito, com a largura de pulsos da estimulação elétrica na perna do paciente. Então, primeiramente, é necessário gerar o conjunto de dados que será utilizado para a estimação. Utilizando o *Simulink*, monta-se o diagrama de blocos proposto em Gaino (2009) e mostrado anteriormente na Figura 4, adaptado de [6,7]. Desta forma, é obtido um conjunto de entradas $u(k)$ e saídas $y(k)$ de acordo com a função de transferência.

Em seguida, for implementado e executado o algoritimo ARMA em ambiente *MatLab*®. Após a execução do programa, o resultado encontrado como no *MatLab*® foi,

$$\frac{444,6}{0,9895s + 1}.$$

Observa-se que resultado obtido é praticamente idêntico à equação (22) que era o resultado esperado, confirmando o bom desempenho do método dos mínimos quadrados e do algoritmo desenvolvido .

B. Implementação do Modelo ARMAX

Com um procedimento análogo ao descrito na seção anterior para obtenção dos dados de entrada e saída, foi implementado e executado também em ambiente *MatLab*® o algoritmo ARMAX. Mas antes, são necessárias três considerações [2,3,4,5]:

- O ARMAX diferencia-se do ARMA por conter entradas exógenas; neste caso de implementação, tais entradas são geradas através da função rand() presente na biblioteca do *MatLab*®;
- Como mencionado anteriormente, a matriz de correlação P_k assumirá inicialmente valores da ordem de 10^5.

- O valor inicial para $\hat{\Theta}_k$ foi configurado de acordo com o resultado do ARMA, acrescentado de um erro de 15%, escolhido arbitrariamente.

Assim, inicia-se a identificação através do ARMAX assumindo a priori que os dados não são polarizados.

Executado o algoritmo, o resultado obtido, tal como encontrado no MatLab® foi:

$$\frac{557,9s+655,5}{s-100,4}.$$

O resultado acima é destoante do esperado pela equação (22). Também nota-se uma diferença na estrutura da função de transferência. Tais detalhes serão discutidos a seguir, após a implementação do tratamento da polarização.

A diferença entre os resultados sugere como a entrada exógena influência na estimação. Também deve ser levado em consideração que os dados provavelmente estão polarizados, o que aumenta a probabilidade de se ter um vetor de parâmetros pouco eficiente para minimizar a função de custo.

Aplicando então o algoritmo sugerido previamente na seção anterior, para o tratamento da polarização, foi obtido o seguinte resultado:

$$\frac{410,5s+0,2919}{s+0,9566}.$$

Observa-se que o tratamento da polarização aproximou satisfatoriamente o resultado obtido com o esperado pela equação (22), mostrando novamente a eficiência do MQ para identificação.

V. DISCUSSÃO

Estimação em batelada e estimação recursiva diz respeito ao algoritmo. Se o mesmo processa os dados todos de uma só vez, diz-se que tal algoritmo faz estimação em batelada. Se os dados são processados seqüencialmente, diz-se que a estimação é recursiva. Por outro lado, a denominação tempo-real refere-se ao fato do processamento (ocorrer suficientemente rápido de maneira que o resultado esteja disponível para influenciar o processo sendo monitorado ou controlado.

Como visto, existem dois tipos clássicos de identificação: por batelada e recursiva. No presente trabalho, eles foram apresentados como forma de auxiliar na identificação da função de transferência que modela o movimento da perna de um paciente paraplégico. Na identificação por batelada, após a excitação dos sistemas, seus dados de entrada e saída são armazenados para avaliação posterior. O processo completo de identificação é realizado ao mesmo tempo; isto gera um efeito complicador, pois não existe limitação no tempo de processamento do algoritmo, exigindo uma grande quantidade de memória para armazenar os valores amostrados dos sinais de entrada e saída do sistema [2,4,5].

Já os algoritmos que executam estimação recursiva possuem uma vantagem sobre os do tipo batelada: utilizam pouca memória e reduzido esforço computacional. A cada período de amostragem, novas medidas dos sinais de entrada e saída tornam-se disponíveis, sendo processadas em tempo real. Com isso os parâmetros são estimados a cada período de amostragem. Isso é útil quando os estes do processo variam lentamente em função de não linearidades, desgastes, aquecimento, falhas, dentre outros.

Na Figura 5, tem-se a resposta ao degrau das funções encontradas para cada modelo. A linha em azul é a resposta para o modelo antropométrico encontrado em (22). Já a linha verde, corresponde à função de transferência identificada com o modelo ARMA, em batelada. Já a linha em vermelho, corresponde ao modelo ARMAX aplicado recursivamente. É possível notar que o traço em verde e azul se sobrepõe, dada a verossimilhança entre a identificação feita com o ARMA e a equação (22).

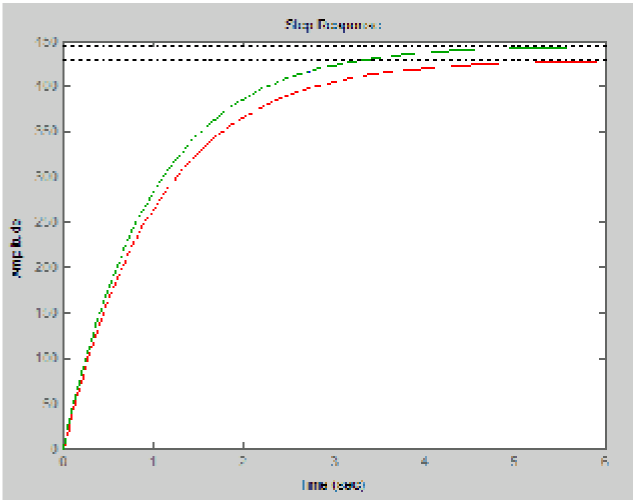

Fig. 5. Resposta ao degrau dos modelos identificados.

VI. CONCLUSÃ0

Foi visto que a modelagem matemática de fenômenos físicos é de grande importância em inúmeros segmentos da ciência. É necessário observar também que de acordo com o sistema que se deseja estudar e suas particularidades, existirá uma interpretação matemática que será mais adequada ao seu contexto do que outra [2,3,4,5].

Desta necessidade, surgiu o estudo da estimação que é a determinação de grandezas físicas que não são possíveis observar, a partir de grandezas passíveis de análise. E um ponto fundamental é que o modelo seja capaz de modelar os comportamentos dominantes deste sistema, e não necessariamente o processo como um todo.

Disto, foi escolhido o método dos mínimos quadrados como parte do processo de identificação de sistemas, pois este busca uma solução que produza o menor erro possível para o mesmo. Foi visto que o estimador de mínimos quadrados possui 3 propriedades fundamentais: ortogonalidade, o estimador MQ ponderado e sua relação com funções de correlação, vista com mais detalhes nos anexos deste trabalho.

A ortogonalidade pode ser considera a propriedade mais relevante, pois é através dela que se pode verificar que, com o estimador MQ, a distância entre os valores medidos e estimados de saída é a menor possível. Mas, também é válido considerar que podem haver situações onde, durante um determinado instante de tempo, algumas medições sejam realizadas com um grau de incerteza superior as demais. Isto abre a possibilidade de acrescentar uma matriz de pesos associada ao erro, que é o estimador ponderado de mínimos quadrados.

Como foi mencionado durante a obtenção do conjunto de dados para estimação, haverá influência do ruído, chamado de ruído de medição. A sua importância consiste em alterar a propriedade da ortogonalidade presente no método dos mínimos quadrados, pois é possível notar pelos resultados obtidos, que o ruído e altera significativamente o valor dos parâmetros de estimação. Foi visto que quando os valores de entrada e saída são polarizados, não há ortogonalidade, e foi necessário programar um tratamento à polarização, para dar seguimento à estimação. Complemento este chamado de estimador estendido de mínimos quadrados.

Assim, o objetivo deste processo é identificar a função de transferência de primeira ordem descrita na equação (22) que consiste na relação do torque ao qual o músculo da perna está sujeito, com a largura de pulsos da estimulação elétrica na perna do paciente. O algoritmo de identificação ARMA apresentou considerável verossimilhança com a equação (22).

Já o algoritmo ARMAX, por conter as entradas externas, que são ruídos adicionados ao sistema, apresentou um resultado levemente divergente, e uma diferença na função de transferência, que é a presença de um zero no numerador. A divergência dos parâmetros é devida à polarização, tratada posteriormente. Já em relação a presença do zero é difícil definir sua influência e tal abordagem não faz parte dos objetivos do trabalho.

Após a verificação que os dados são polarizados, aplicou-se o algoritmo de tratamento da polarização. O resultado foram parâmetros mais próximos aos desejados, melhorando o erro de estimação e conseqüentemente a resposta esperada do processo de identificação.

Desta forma, vemos a importante aplicação que a identificação de sistemas pode fornecer para auxiliar no tratamento de pacientes com algum tipo de deficiência física, no caso, a paraplegia.

REFERENCES

[1] K. Ogata. Engenharia de Controle Moderno. 4ª Edição. Editora Prentice-Hall, 2003.

[2] L. A. Aguirre. Introdução à Identificação de Sistemas. 3ª Edição. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2007.

[3] G. GoodWin; R. L. Payne. Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis, Academic Press, 1977.

[4] T. Soderstrom; P. Stoica. System Identification, Prentice Hall, 1989.

[5] L. Ljung. System Identification: Theory for the User, Prentice Hall, 2nd Ed., 1999.

[6] M. Ferrarin & A. Peddotti, “The Relationship Between Electrical Stimulus and Joint Torque: A Dynamic Model”, *IEEE Transactions on Rehabilitation Enginneering*, vol. 8, no. 3, pp. 342–352, 2000.

[7] R. Gaino. Controle de Movimentos de Pacientes Paraplégicos Utilizando Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno. UNESP, 2009.