O Algoritmo SIMPLEX Informalmente Compreendido no Problema Linear de Fluxos em Redes

Catia Maria dos S. Machado and Elizangela D. Pereira

Resumo - Este trabalho tem por objetivo a compreensão informal do algoritmo simplex no problema de fluxos em redes. Acreditamos que essa compreensão é fundamental para o entendimento do algoritmo especializado para redes. Grande parte da literatura aborda o método simplex e desenvolve o algoritmo simplex no tableau com suas variáveis ilimitadas superiormente. No entanto, em muitos problemas reais essas variáveis estão limitadas superiormente, sendo importante o conhecimento das razões dos procedimentos utilizados no trabalho numérico de resolução de problemas de programação linear através do método simplex que possui suas variáveis limitadas superiormente.

Palavras-chave: Fluxos em rede, Programação Linear, Algoritmo SIMPLEX, Modelagem Matemática.

I. Introdução

A técnica de programação linear aplica-se à problemas cuja natureza satisfazem hipóteses básicas bem definidas, como linearidade e o emprego de parâmetros determinísticos conhecidos. Esses problemas apresentam uma função objetivo e um conjunto de restrições que devem satisfazer às hipóteses básicas. Modelos matemáticos são construídos para representar tais problemas e diferentes métodos de solução são desenvolvidos a partir desses modelos matemáticos. O primeiro algoritmo para resolver o Problema de Programação Linear (PPL) foi o Simplex desenvolvido pelo matemático americano George Dantzig em 1947. Após vários anos de aprimoramento tornou-se muito eficiente, apesar de pesquisar a solução ótima percorrendo de vértice em vértice. De 1950 até 1965 foram desenvolvidos algoritmos específicos para modelos lineares de fluxos em redes. A estrutura especial do modelo permite a utilização de métodos específicos muito eficientes a esses casos, não se aplicando a um caso geral.

Pretendemos nesse trabalho abordar informalmente o método simplex em um problema específico de fluxos em redes, com a finalidade de mostrar as razões dos procedimentos utilizados no trabalho numérico de resolução de um problema linear de fluxos em redes através do método simplex sem o embaraço das sutilezas matemáticas. Uma abordagem também informal que conduz ao método simplex foi utilizada em um estudo de caso apresentado em [1].

II. Fundamentos Matemáticos do Método Simplex

Uma matriz A_{mxn} com $m < n$ possui posto $p(A) = m$. A matriz A pode ser particionada como $A=[B \mid N]$, onde B é matriz quadrada e det $B\neq 0$. Da mesma forma x, l e u podem ser particionados como:

$$Ax = b \leftrightarrow Bx^B + Nx^N = b$$
$$l \leq x \leq u \leftrightarrow \begin{Bmatrix} l^B \leq x^B \leq u^B \\ l^N \leq x^N \leq u^N \end{Bmatrix}.$$

Onde x representa as variáveis (fluxo do produto através da rede), l representa a capacidade mínima (limite inferior) das variáveis e u representa a capacidade máxima (limite superior) das variáveis.

Dada uma solução básica viável para um problema de programação linear, podemos particionar A, c, x, l e u da forma: $A=[B \mid N]$, $c=[c^B|c^N]$, $x=[x^B|x^N]$, $l=[l^B,l^N]$ e $u=[u^B|u^N]$.

Nessa partição, a cada variável básica x^B temos associados um limite inferior e superior l^B e u^B respectivamente. Analogamente a cada variável não básica x^N temos associados um limite inferior e superior l^N e u^N respectivamente.

Queremos minimizar o custo $c = [c^B \mid c^N]$ associados as variáveis básicas x^B e não básicas x^N.

$$\text{Min } c^Bx^B + c^Nx^N \quad (1)$$

s.a

$$Bx^B + Nx^N = b \quad (2)$$
$$l^B \leq x^B \leq u^B \quad (3)$$
$$l^N \leq x^N \leq u^N \quad (4)$$

A partir de (2), obtemos:

$$B^{-1}Bx^B + B^{-1}Nx^N = B^{-1}b$$
$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Nx^N$$

Substituindo por x^B vem:

$$\text{Min } c^B (B^{-1}b - B^{-1}Nx^N) + c^Nx^N$$
$$\text{Min } c^B B^{-1}b - c^B B^{-1}Nx^N + c^Nx^N$$
$$\text{Min } c^B B^{-1}b + (c^N - c^B B^{-1}N)x^N \quad (1.1)$$

s.a

$$l^B \leq B^{-1}b - B^{-1}Nx^N \leq u^B \quad (1.2)$$
$$l^N \leq x^N \leq u^N \quad (1.3)$$

Teremos nossa atenção voltada para a solução não básica $x_i^N \in [l_i^N, u_i^N]$ e o conjunto de soluções não básicas que podem melhorar nossa função objetivo.

Para um problema de minimização, o cálculo matricial $(c^N - c^B B^{-1}N)_i$ indicará se uma variável não-básica de índice i poderá diminuir ainda mais a função objetivo.

Dessa forma, uma das possibilidades acontece:

- se $\{i: x_i^N = l_i^N$ e $(c^N - c^B B^{-1}N)_i < 0\}$, então a variável não-básica de índice i pode diminuir a função objetivo,
- se $\{i: x_i^N = u_i^N$ e $(c^N - c^B B^{-1}N)_i > 0\}$, então a variável não-básica de índice i pode diminuir a função objetivo.

III. O Método Simplex para o Problema de Fluxo em Redes

A especialização do algoritmo simplex primal de George Dantzig para o problema de fluxo em rede com custo mínimo é de grande importância, pois o método simplex primal pode ser realizado diretamente na rede eliminando o peso computacional na atualização da inversa da matriz básica B.

Nessa seção, serão necessários conhecimentos matemáticos sobre o método simplex especializado para redes. Os resultados a partir da teoria de grafos utilizados no desenvolvimento do algoritmo especializado para redes e toda a fundamentação teórica do método simplex especializado pode ser encontrada em [2] e [3].

A. Algoritmo Simplex Primal

Passo 1. Inicialização

Seja $[x^B | x^N]$ uma solução básica viável com A = [B | N].

Passo 2. Variável candidata a entrar na base.

Sejam os conjuntos:

$\psi_1 = \{\{i: x_i^N = l_i^N$ e $(c^N - c^B B^{-1}N)_i < 0\}$

e

$\psi_2 = \{\{i: x_i^N = u_i^N$ e $(c^N - c^B B^{-1}N)_i > 0\}$

Se $\Psi_1 \cup \Psi_2 = \varnothing$, o algoritmo termina com a solução ótima $[x^B | x^N]$. Caso contrário, seleciona-se $e_k \in \psi_1 \cup \psi_2$ para entrar na base.

Assim faça , $\delta \leftarrow \begin{cases} +1, \text{ se } e_k \in \psi_1 \\ -1, \text{ se } e_k \in \psi_2 \end{cases}$.

Passo 3. Teste de Razão. (quem sai da base)

Seja $y \leftarrow B^{-1}N(k)$. Faça

$$\Delta_1 \leftarrow \min_{\sigma(y_j)=\delta} \left\{ \frac{x_j^B - l_j^B}{|y_j|}, \infty \right\},$$

e

$$\Delta \leftarrow \min\{\Delta_1, \Delta_2, u_k^N - l_k^N\}$$

Passo 4. Atualização dos Fluxos.

Faça $x_k \leftarrow x_k + \Delta\delta$ e $x^B \leftarrow x^B - \Delta\delta y$.

Se $\Delta = u_k^N - l_k^N$, retorne ao Passo 2.

Passo 5. Pivoteamento

Sejam os conjuntos:

$\Psi_3 = \{ j : \sigma(y_j) = \delta$ e $x_j^B = l_j^B \}$

e

$\Psi_4 = \{ j : -\sigma(y_j) = \delta$ e $x_j^B = u_j^B \}$

Selecione algum $m \in \Psi_3 \cup \Psi_4$. Substitua B(m) com N(k) e retorne ao Passo 2.

B. Algoritmo Simplex Primal Especializado

Passo 1. Inicialização .

Seja $[x^B | x^N]$ uma solução básica viável com árvore τ_B.

Passo 2. Variável candidata a entrar na base.

Sejam os conjuntos:

$\psi_1 = \{ e_j: x_j = l_j$ e $\pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j > 0\}$

e

$\psi_2 = \{ e_j: x_j = u_j$ e $\pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j < 0\}$

Se $\Psi_1 \cup \Psi_2 = \varnothing$, o algoritmo termina com a solução ótima $[x^B | x^N]$. Caso contrário, seleciona-se $e_k \in \psi_1 \cup \psi_2$ para entrar na base.

Assim, $\delta \leftarrow \begin{cases} +1, \text{ se } e_k \in \psi_1 \\ -1, \text{ se } e_k \in \psi_2 \end{cases}$.

Passo 3. Teste de Razão. (quem sai da base)

Seja, P = $\{\mathbf{s}_1, e_{j_1}, \mathbf{s}_2, e_{j_2}, \ldots, \mathbf{s}_n, e_{j_n}, \mathbf{s}_{n+1}\}$, o caminho na árvore τ_B unindo F(k) (origem do arco) ao T(k) (destino do arco).

Faça $\Delta_1 \leftarrow \min_{O_i(P)=\delta} \{x_{j_i} - l_{j_i}, \infty\}$,

$\Delta_2 \leftarrow \min_{-O_i(P)=\delta} \{u_{j_i} - x_{j_i}, \infty\}$, $\Delta \leftarrow \min\{\Delta_1, \Delta_2, u_k - l_k\}$.

Passo 4. Atualização dos Fluxos.

Faça $x_k \leftarrow x_k + \Delta\delta$.

Para todo $e_j \in P$, faça $x_{j_i} \leftarrow x_{j_i} - \Delta\delta O_i(P)$. Se $\Delta = u_k - l_k$.

Retorne ao Passo 2.

Passo 5. Pivoteamento (Atualização da Árvore e Variáveis Duais)

Sejam os conjuntos:

$\Psi_3 = \{ e_{j_i} : x_{j_i} = l_{j_i}$ onde $O_i(P) = \delta \}$

e

$\Psi_4 = \{ e_{j_i} : x_{j_i} = u_{j_i}$ onde $-O_i(P) = \delta \}$.

Selecione algum $e_m \in \Psi_3 \cup \Psi_4$. Permute e_m em τ_B com e_k, atualize as variáveis duais e retorne ao Passo 2.

IV. O ALGORITMO SIMPLEX INFORMALMENTE COMPREENDIDO

Pretendemos, através desse exemplo, mostrar o método simplex informalmente compreendido para o problema de fluxo em redes, interpretar as expressões que solucionam o problema por meio do método simplex primal.

Temos um problema de fluxo a custo mínimo, onde corresponde à necessidade de circular fluxo de um produto sujeito a restrições de rede (máximo e mínimo de fluxo admissível nos arcos, bem como um valor associado ao trânsito em cada arco por unidade de fluxo (custo)).

Partimos de uma solução básica viável, onde existe fluxo de um produto que circula em uma rede capacitada. O exemplo que serve para ilustrar o método é representado pela rede da figura abaixo. Assim, podemos imaginar a rede como sendo o transporte de um determinado produto. Uma fábrica representada pelo nó 1 tem que transportar 5 unidades de determinado produto até o mercado consumidor representado pelo nó 3. O nó 2, permite que a quantidade de fluxo que entra no nó seja igual a quantidade de fluxo que sai do nó, denominado assim nó de transbordo.

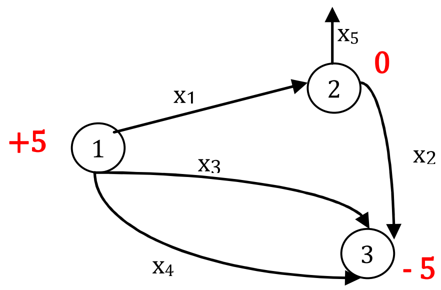

Figura 1. Transporte de um produto em um modelo de rede contendo um nó de transbordo.

Se a fábrica representada pelo nó 1 oferta 5 unidades do produto (convencionamos +5) então o mercado consumidor representado pelo nó 3 necessita de 5 unidades do produto (convencionamos -5). Sempre devemos ter uma rede em equilíbrio, ou seja, a quantidade de oferta deve ser igual a quantidade de demanda. O custo de transporte nos arcos estão descritos na tabela a seguir:

Código do arco	Custos nos arcos
x_1	1
x_2	1
x_3	3
x_4	10

Matematicamente podemos formular o problema como:

Min $Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4$

s.a

$x_1 + x_3 + x_4 = 5$ (restrição para o nó de oferta 1)

$-x_1 + x_2 + x_5 = 0$ (restrição para o nó de transbordo 2)

$-x_2 - x_3 - x_4 = -5$ (restrição para o nó de demanda 3)

$0 \leq x_1 \leq 4$; $0 \leq x_2 \leq 2$; $0 \leq x_3 \leq 4$; $0 \leq x_4 \leq 10$ (restrições de capacidade nos arcos da rede, ou seja, limite inferior e superior)

Queremos mimimizar a função Z, ou seja, encontrar a solução ótima onde o produto possa chegar no mercado consumidor com o menor custo.

Passo 1) Neste problema, tomaremos como solução básica inicial o seguinte fluxo nos arcos:
$x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 4$; $x_4 = 1$; $x_5 = 0$.

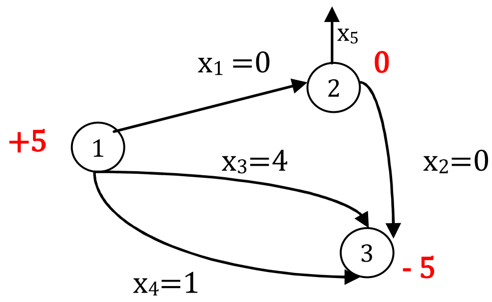

Figura 2. Rede representando a Solução Inicial

Onde as variáveis básicas x_B são $x_1 = 0$; $x_4 = 1$ e $x_5 = 0$ e as variáveis não-básicas x_N são: $x_2 = 0$ e $x_3 = 4$.

Temos ainda que a presente solução fornece um custo total de $Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 22$.

A solução básica é a árvore enraizada (pelo arco x_5) mostrada a seguir:

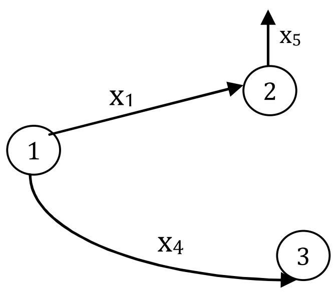

Figura 3. Rede representando a árvore básica

A árvore da solução básica pode ser representada através da matriz B, e o arco x_5 é um arco artificial para a matriz B possuir posto completo.

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_5 \end{array} \text{ (arco raiz)} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

, dessa forma garantimos a matriz B inversível.

Passo 2) Devemos testar a otimalidade da presente solução básica. Para tanto, devemos descobrir se a função objetivo pode diminuir ainda mais de valor com a entrada de uma nova variável não-básica na base atual. Assim, é conveniente expressar a função objetivo em termos das atuais variáveis não-básicas x_2 e x_3. Os sinais algébricos dos coeficientes das variáveis não básicas na função objetivo é que dirão se a entrada da variável na base diminui a função objetivo. Esses coeficientes são os cálculos matriciais $\mathbf{(c^N - c^B\, B^{-1} N)}$ ou $(\pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j)$ correspondente ao arco não básico j.

Isolando cada variável básica em função das variáveis não básicas na função objetivo, obtemos as seguintes expressões algébricas:

$x_1 = x_2$
$x_4 = 5 - x_2 - x_3$
$x_5 = 0$

Substituindo na função objetivo as variáveis básicas isoladas obtemos:
$Z = x_2 + x_2 + 3x_3 + 10(5 - x_2 - x_3) = 2x_2+3x_3+50-10x_2-10x_3 = 50-8x_2-7x_3$

Pensemos:

Se a variável não básica x_2 entrar na base, a variável não básica $x_3 = 4$ permanecerá com o mesmo valor, então:

Se substituirmos o valor $x_3 = 4$ na função Z temos:

$Z = 50 -8x_2 -28 = 22 -8x_2$ e o valor da função objetivo carrega o valor atual de Z.

Se a variável x_2 aumentar de 1 unidade de fluxo teremos: $Z = 22-8.(1) = 14$

Assim, mostramos que a entrada da variável x_2 na base fará com que o valor da função objetivo Z possa ser menor que o valor atual 22, visto que $(\mathbf{c}^N - \mathbf{c}^B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_i = -8 < 0$ e o objetivo é minimizar Z. Assim a presente solução não é ótima e a variável x_2 é candidata a entrar na base.

Da mesma forma podemos mostrar que a variável não básica x_3 que encontra-se no limite superior não é candidata a entrar na base, pois:

Ao substituirmos $x_2 = 0$, temos que $Z = 50 -7x_3$. A variável x_3 encontra-se no limite superior, portanto deverá ser diminuída para entrar na base. No entanto, uma unidade de fluxo diminuída na variável x_3 faz com que a função objetivo deixe de ser 22 para se tornar maior, isto é:

$Z = 50 -7.(3) = 29$

Como $\{i: x_i^N = u_i^N$ e $(\mathbf{c}^N - \mathbf{c}^B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_i = -7 < 0\}$, a variável x_3 não é candidata a entrar na base.

Logo: Escolhemos a variável x_2 para entrar na base.

Passo 3) Cada variável básica foi isolada em função das variáveis não-básicas e assim a variável que primeiro atingir seu limite inferior ou superior deverá sair da base.

$x_1 = x_2$
$x_4 = 5 - x_2 - 4 = 1 - x_2$
$x_5 = 0$

Se a variável x_2 entrar na base, x_2 crescerá de valor, apesar da variável x_3 continuar igual a 4, por continuar sendo variável não-básica.

Fazer $x_2 = 1$ fará com que a variável x_4 atinja seu limite inferior e saia da base. Esta é a escolha adequada, pois considerando o envio de uma quantidade de fluxo $\Delta = 1$ através do arco correspondente a variável x_2 fará por ajustar as variáveis básicas de modo a manter a viabilidade, determinando assim a variável que deverá deixar a base. O ciclo formado com a variável x_2 (candidata a entrar na base) é mostrado nas figuras abaixo.

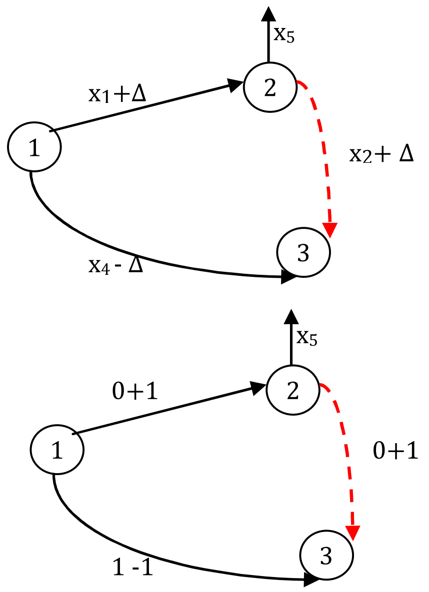

Figura 4. Ciclo formado com a variável x_2

Ajustar os fluxos no ciclo básico de modo que as restrições de rede e capacidade nos arcos permaneçam invioladas sugere $\Delta = 1$.

Passo 4) A nova base será, desta forma constituída pelas variáveis x_1, x_2 e x_5. Os valores das novas variáveis (atualização dos fluxos) são:
$x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$. Assim, o atual valor da função objetivo $Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 14$.

Passo 5) A nova árvore básica tem a seguinte representação:

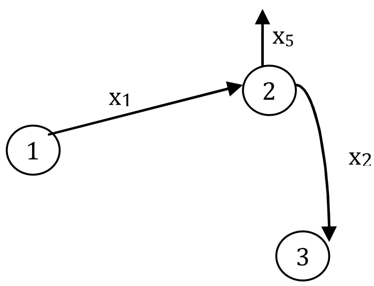

Figura 5. Árvore básica da nova solução

Ao retornar o passo 2, devemos novamente testar a otimalidade da presente solução. Para tanto, devemos descobrir se a função objetivo pode diminuir ainda mais de valor com a entrada de uma nova variável não-básica na base atual. Assim, é conveniente expressar a função objetivo em termos das atuais variáveis não-básicas x_3 e x_4.

Isolando as variáveis básicas em função das não- básicas temos:

$x_1 = 5- x_3 - x_4$
$x_2 = 5- x_3 - x_4$
$x_5 = 0$

Substituindo na função objetivo as variáveis básicas isoladas obtemos:

$Z = 5 - x_3 - x_4 + 5 - x_3 - x_4 + 3x_3 + 10x_4 = 10 + x_3 + 8x_4$

Se a variável não básica x4 entrar na base, a variável $x_3 = 4$ permanecerá com o mesmo valor, então:

Se substituirmos o valor $x_3 = 4$ na função Z temos:

$Z = 10 + 4 + 8\ x_4 = 14 + 8x_4$ e o valor da função objetivo carrega o valor atual de Z.

Se a variável x_4 aumentar de 1 unidade de fluxo teremos: $Z = 14 + 8.(1) = 22$.

A entrada da variável x_4 na base fará com que a função objetivo aumente de valor, visto que $(c^N - c^B B^{-1}N)_i = 8 > 0$ e a variável x_4 encontra-se no limite inferior. Se o objetivo é minimizar Z, acarreta que a variável x_4 aumenta a função objetivo e, portanto não é candidata a entrar na base.

Vejamos o que acontece com a variável x_3. Se substituirmos o valor $x_4 = 0$ na função Z temos, $Z = 10 + x_3$. Como a variável x_3 encontra-se no limite superior, se diminuirmos uma unidade de fluxo no arco x_3 faremos com que a função objetivo deixe de ser 14 para se tornar menor. Assim é conveniente que a variável x_3 entre na base.

Portanto, se $\{i: x_i^N = u_i^N$ e $(c^N - c^B B^{-1}N)_i = 1 > 0\}$ é candidata a entrar na base.

Escolhemos a variável x_3 para entrar na base.

Novamente retomemos o passo 3.

Passo 3) Cada variável básica foi isolada em função das variáveis não-básicas e assim a variável que primeiro atingir seu limite inferior ou superior deverá sair da base.

$x_1 = 5 - x_3 - x_4 = 5 - x_3$

$x_2 = 5 - x_3 - x_4 = 5 - x_3$

$x_5 = 0$

Se a variável x_3 entrar na base, x_3 diminuirá de valor, apesar da variável x_4 continuar igual a 0, por continuar sendo variável não-básica.

Fazer $x_3 = 3$ fará com que x_2 saia da base por atingir o limite superior. Esta é a escolha adequada pois, considerando a árvore básica, a diminuição de uma quantidade de fluxo $\Delta = 1$ através do arco correspondente a variável x_3 fará por ajustar as variáveis básicas de modo a manter a viabilidade, determinando assim a variável que deverá deixar a base. O ciclo formado com a variável x_3 (candidata a entrar na base) é mostrado na figura 5.

À medida que o fluxo no arco x_3 diminui, algum arco da árvore alcançará seu limite inferior ou superior (ou a solução ideal não teria limites). Assim, a variável x_2 atinge seu limite superior e deixa a base.

Passo 4) A nova base será, desta forma constituída pelas variáveis x_1, x_3 e x_5. Os valores das novas variáveis são: $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$. Assim, o atual valor da função objetivo $Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13$.

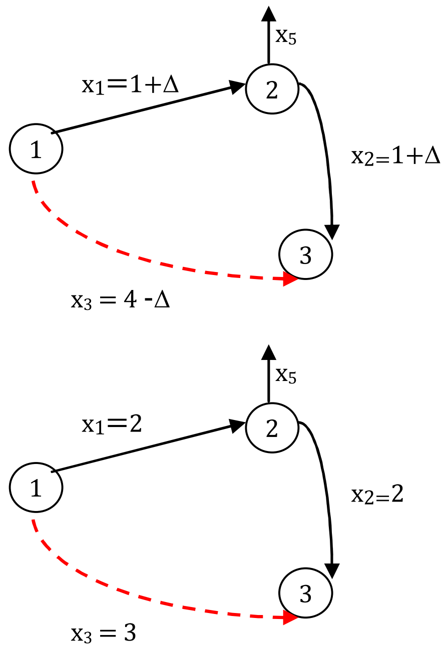

Figura 6. Ciclo formado pela variável x_3

Passo 5) A árvore básica tem a seguinte representação:

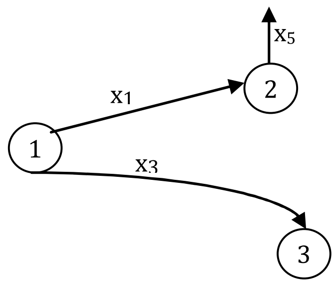

Figura 7. Nova árvore básica de solução

Ao retornar o passo 2, devemos novamente testar a otimalidade da presente solução básica. Assim, novamente, expressamos a função objetivo em termos das atuais variáveis não-básicas x_2 e x_4.

Isolando as variáveis básicas em função das não- básicas temos:

$x_1 = x_2 + x_5$

$x_3 = 5 - x_2 - x_4$

$x_5 = 0$

Substituindo na função objetivo as variáveis básicas isoladas obtemos:

$Z = x_2 + x_2 + 3(5 - x_2 - x_4) + 10x_4 = 2x_2 + 15 - 3x_2 - 3x_4 + 10x_4 = 15 - x_2 + 7x_4$

Observe que ao substituirmos o valor $x_2 = 2$ obtemos $Z = 13 + 7x_4$ e a função objetivo carrega o valor atual de Z.

A entrada da variável x_4 na base fará com que a função objetivo aumente de valor, visto que $(c^N - c^B B^{-1}N)_i = 7 > 0$ e a variável x_4 encontra-se no limite inferior. Se o objetivo é minimizar Z, acarreta que a variável x_4 aumenta a função objetivo e portanto não é candidata a entrar na base.

Se substituirmos o valor $x_4 = 0$ obtemos $Z = 15-x_2$. Como a variável x_2 encontra-se no limite superior, se diminuirmos uma unidade de fluxo no arco x_2 faremos com que a função objetivo aumente de valor, ou seja, deixe de ser 13 para ser 14.

Logo não temos mais candidatos a entrar na base e estamos na solução ótima. O valor ótimo da função objetivo é 13.

V. Considerações Finais

Resolver um problema de fluxo em redes de forma rápida e eficiente não significa necessariamente ter que justificar toda a linha de raciocínio como foi efetuado no exemplo de solução. Tentamos nessa discussão mostrar a compreensão do algoritmo simplex, bem como o raciocínio sobre as variáveis não básicas que podem estar tanto no seu limite inferior quanto superior. O algoritmo especializado, apresentado na seção 3, é um mecanismo numérico eficiente que conduz a solução ótima, desde que ela exista e o procedimento é descrito com detalhes em [2].

VI. Bibliografia

[1] Loesch,C. e Hein, N. (1999). "Pesquisa Operacional".Blumenau, Editora da FURB.
[2] Kennington, J.L.(1980). "Algorithm for Network Programming", New York, John Willey & Sons.
[3] Machado C.M.S.(2005). "Um Modelo de Fluxo em Rede para Solução de Problemas de Distribuição de Produtos C*ompostos", Tese de Doutorado, UFSC.*