

# Otimização de Carteiras de Investimento: integrando Teoria de Markowitz, Análise Estatística e Método Simplex

Luís Fernandes Saucedo Souza

*Instituto de Matemática, Estatística e Física  
Universidade Federal do Rio Grande - FURG*  
Rio Grande, Rio Grande do Sul  
Email: luisfernandessaucedosouza4@gmail.com

Leandro Andrade de Oliveira

*Instituto de Ciências Econômicas, Administrativas e Contábeis - ICEAC  
Universidade Federal do Rio Grande - FURG*  
Rio Grande, Rio Grande do Sul  
E-mail: leao\_oliver@live.com

Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

*Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF  
Universidade Federal do Rio Grande - FURG*  
Rio Grande, Rio Grande do Sul  
E-mail: barbararodriguez@furg.br

Cristiana Andrade Poffal

*Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF  
Universidade Federal do Rio Grande - FURG*  
Rio Grande, Rio Grande do Sul  
E-mail: cristianaandrade@furg.br

**Resumo**—Este artigo descreve a construção de uma carteira de investimentos, diversificada e eficiente, no contexto do mercado de ações. Inicialmente, explora-se a importância da teoria de Markowitz e conceitos estatísticos, como variância, desvio padrão, covariância e correlação, na formação de estratégias de investimento. Em seguida, a metodologia proposta é empregada na composição de uma carteira equilibrada, considerando a seleção de ações de diferentes setores, avaliação das correlações entre os ativos e otimização dos pesos de cada ativo na carteira. Utilizando técnicas de programação linear e o método Simplex, busca-se maximizar o retorno esperado da carteira, levando em conta restrições de risco. Os resultados demonstram a eficácia da abordagem proposta na obtenção de retornos significativos com um nível aceitável de risco, ilustrando a importância da diversificação e do uso de ferramentas estatísticas e matemáticas na tomada de decisões de investimento no mercado de ações.

**Palavras-chave:** Teoria de Markowitz, Método Simplex, Análise estatística, Mercado de ações, Programação linear e Carteiras de investimento.

## I. INTRODUÇÃO

O mercado de ações é um componente essencial do sistema financeiro global e desempenha um papel vital na economia de muitos países. Compreender como ele funciona e como os investidores podem participar é fundamental para aqueles que desejam expandir sua compreensão dos mecanismos financeiros e explorar oportunidades de investimento.

Em termos simples, o mercado de ações é um ambiente onde os investidores compram e vendem participações de propriedade em empresas, conhecidas como ações. Estas ações representam uma parcela de propriedade em uma empresa e conferem aos seus detentores certos direitos, como por exemplo, receber uma parte dos lucros (dividendos) e votar em certas decisões corporativas [1].

O mercado de ações é um reflexo das condições econômicas e do desempenho das empresas. Ele é influenciado por uma va-

riedade de fatores, incluindo indicadores econômicos, notícias globais, desempenho da indústria e decisões empresariais. Investidores, tanto individuais quanto institucionais, buscam ganhos comprando ações, esperando uma valorização ao longo do tempo e recebendo dividendos regulares, caso a empresa distribua lucros. As empresas podem levantar capital emitindo ações, o que lhes permite investir em novos projetos, financiar expansões e realizar outros empreendimentos que impulsionam o crescimento e o desenvolvimento econômico. No entanto, o mercado de ações também é suscetível à volatilidade e riscos, pois os preços das ações podem flutuar consideravelmente em resposta a uma série de fatores, incluindo mudanças nas condições econômicas, eventos geopolíticos, crises financeiras e decisões de política monetária [2].

Para “navegar” com sucesso no mercado de ações, os investidores devem ter uma compreensão sólida dos princípios básicos de investimento, avaliação de empresas, análise de risco e gestão de portfólio (um portfólio, ou carteira, de investimentos pode ser definido como um conjunto de aplicações financeiras em diferentes ativos de diferentes categorias) [3]. Além disso, é crucial estar ciente de seu perfil de risco e objetivos de investimento para tomar decisões embasadas em informações e, assim, construir uma carteira equilibrada e diversificada.

Um dos métodos para análise de risco foi desenvolvido pelo economista Harry Markowitz. Sua teoria, também conhecida como teoria da seleção de portfólio, foi proposta em meados do século XX e é considerada uma das pedras angulares da moderna teoria de finanças [4]. Segundo Markowitz, o processo de seleção de um portfólio pode ser dividido em dois estágios. O primeiro começa com a observação e experimentação e finaliza com a crença sobre o futuro desempenho dos títulos disponíveis. O segundo estágio inicia

com crenças relevantes sobre o desempenho futuro e finaliza com a escolha do portfólio [5].

Contrariando o pensamento dominante à época, de que a melhor opção para a composição da carteira consistia na concentração de investimentos em ativos que ofereciam os maiores retornos, Markowitz propôs que seria possível obter combinações mais eficientes de alocação de recursos por meio da avaliação e compensação do risco dos ativos que compunham a carteira e, assim, estruturou as bases sobre as quais se firmou a Teoria Moderna de Carteiras [6]. Tal teoria pode ser considerada uma ferramenta que permite ao investidor compor a carteira de investimento com diferentes ativos financeiros e otimizar a relação entre retorno e risco do investimento. Segundo Silva et al. [7], não há dúvida que o investidor procura maximizar a utilidade esperada da carteira, sendo assim, enfrenta a tarefa de compor uma carteira de ativos que maximize o retorno esperado versus o risco oferecido pelo total de ativos componentes desse portfólio.

O problema de composição de carteiras está intrinsecamente relacionado aos conceitos de risco e retorno. Quando um operador do mercado financeiro ou administrador de empresas compõe uma carteira de ativos, o objetivo é, basicamente, obter o máximo de retorno possível, dado um nível aceitável de risco, ou obter o mínimo risco, fixando um nível de retorno. Considerando-se um total de ativos, que podem ser combinados em diferentes proporções para a formação de carteiras de investimentos, é possível definir um conjunto limitado dessas carteiras, que são preferíveis em relação a todas as outras. Tais carteiras são denominadas Carteiras Eficientes e fazem parte da denominada Fronteira Eficiente [7].

Para a diversificação de carteiras, pode ser empregada a modelagem de um problema de Programação Linear, como o método Simplex. A Programação Linear refere-se a um conjunto de técnicas matemáticas aplicadas a fim de maximizar ou minimizar uma função linear sujeita a um conjunto de restrições lineares. O Método Simplex é especialmente eficaz na resolução de problemas que envolvem a otimização de um processo sujeito a limitações e condições específicas [8]. Ele pode ser definido como um algoritmo de resolução de problemas em Programação Linear. Foi desenvolvido em 1949, por George B. Dantzig, e, atualmente, possui grande aceitação devido não só a sua simplicidade, mas, principalmente, a sua capacidade de reproduzir soluções em tempo aceitável [9]. É um procedimento algébrico iterativo que parte de uma solução básica factível inicial e busca, a cada iteração, uma nova solução básica factível com melhor valor na função objetivo, até que o valor ótimo seja atingido. A partir de uma solução básica atual, uma variável não básica entra na base no lugar de outra variável básica, que passa a ser não básica, gerando uma nova solução chamada solução básica adjacente [8].

Na prática, o Método Simplex começa com uma solução inicial viável e, em seguida, itera, por meio de várias soluções adjacentes, em direção a uma solução ótima. Ele opera movendo-se de uma solução básica viável para outra, em direção à solução ótima, sempre melhorando o valor da função objetivo. Durante esse processo, o método garante que as

restrições sejam satisfeitas em cada etapa, e a solução final é alcançada quando não é possível encontrar uma solução melhor [8].

Dentro deste contexto, este artigo propõe uma abordagem metodológica para a formação de carteiras de investimentos no mercado de ações, integrando princípios da teoria de Markowitz, análise estatística e o método Simplex de Programação Linear com o suporte da linguagem de programação Python e suas bibliotecas, que fornecem ferramentas para a extração de dados e resolução de problemas. A combinação desses elementos visa otimizar a alocação de ativos, buscando maximizar o retorno esperado da carteira, ao mesmo tempo em que se gerencia efetivamente os riscos associados. Além disso, examina-se a importância da diversificação entre diferentes setores econômicos e a análise de correlações para garantir um portfólio equilibrado e resiliente.

Para atingir os objetivos propostos, o artigo está estruturado da seguinte forma: na seção II, discute-se a fundamentação teórica relevante, incluindo definições acerca da bolsa de valores, da teoria de Markowitz e de conceitos estatísticos essenciais para a análise de riscos e retornos no mercado de ações. A seção III apresenta a metodologia proposta, detalhando o processo de seleção de ativos, análise de correlações e a aplicação do método Simplex para otimização da alocação de ativos. A seção IV discute os resultados obtidos e suas implicações para a tomada de decisões de investimento. Por fim, na seção V, uma conclusão que resume os principais pontos abordados e sugere direções para pesquisas futuras.

## II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O processo de tomada de decisão de investimento na bolsa de valores é intrinsecamente desafiador, envolvendo uma variedade de ativos, riscos e expectativas de retorno. Nesse contexto, a teoria de Markowitz, conceitos estatísticos, tais como desvio padrão, covariância e correlação, e o método Simplex emergem como ferramentas para auxiliar investidores na tomada de boas decisões e minimização dos riscos.

### A. Bolsa de valores

São mercados organizados nos quais operações de compra e de venda de ações e de títulos são realizadas a partir de um conjunto de regras. Geralmente, os investidores têm acesso a uma grande quantidade de informações sobre as operações realizadas nas bolsas de valores. Para terem suas ações negociadas nestes mercados, as empresas precisam cumprir uma série de exigências que tornam mais transparentes as suas situações financeiras e as formas como se relacionam com seus acionistas. As operações com ações em bolsas de valores são realizadas por sociedades corretoras. Pessoas físicas ou jurídicas, fundos de investimento e outras instituições financeiras operam através das corretoras [10].

As corretoras de investimentos são instituições financeiras, que proporcionam maior liquidez ao mercado. São responsáveis pelo intermédio do investidor com o mercado financeiro, facilitando as negociações. Através dessas empresas, é possível adquirir produtos financeiros, como títulos públicos,

CDBs, cotas de fundos de investimentos, ações e outros [11]. Elas também atuam buscando as melhores oportunidades para seus clientes. Cabe a elas oferecer e recomendar os produtos mais rentáveis, com aplicações que atendam às necessidades e ao perfil do investidor, e que estejam alinhadas aos seus objetivos de curto, médio e longo prazo [11].

Tratando-se de bolsa de Valores, aqui no Brasil, existe uma única, a B3 (Brasil, Bolsa, Balcão). Ela é a fusão da BM&F BOVESPA com a Cetip [12]. Um dos conceitos mais importantes da Bolsa de Valores e do mercado de ações no Brasil é o índice IBOVESPA. De acordo com a B3 [13], o índice IBOVESPA é resultado de uma carteira teórica de ativos. É composto pelas ações e *units* de companhias listadas na B3 que atendem aos critérios descritos na sua metodologia, correspondendo a cerca de 80% do número de negócios e do volume financeiro do mercado de capitais do Brasil. A metodologia da B3 é construída de acordo com os seguintes critérios:

- Universo de ativos elegíveis: ações e *units* de ações (ativos que concentram duas ou mais ações de uma empresa [14]).
- Critérios de Seleção: estar entre os ativos que representem 85% em ordem decrescente de Índice de Negociabilidade (IN) (*buffer*<sup>1</sup> 90%); 95% de presença em pregão; 0,1% do volume financeiro no mercado a vista (lote-padrão); e não ser *penny stock* (ações com valor menor que R\$ 1,00 [16]).
- Ponderação: valor de mercado do *free float*<sup>2</sup>/Capitalização 20% por empresa/Capitalização 2x IN.
- Tipo de retorno: total (R\$).
- Rebalanceamento: quadrimestral (1ª segunda-feira de Janeiro, Maio e Setembro).

O valor em pontos publicado pelo IBOVESPA é determinado pelo produto da quantidade de cada ação que compõe a sua carteira técnica e o seu respectivo preço de mercado [18]. Por exemplo, admita em nível de ilustração da metodologia de cálculo, que um índice de bolsa seja composto de somente quatro ações: A, B, C e D, cujas participações na carteira estão definidas em, respectivamente, 60.000, 20.000, 40.000 e 10.000 ações [18]. A Tabela I descreve o valor das ações ao final de dois pregões consecutivos, assim como a valorização ocorrida.

No exemplo citado, de um pregão para outro, o índice apurou uma variação positiva de 1,55% (313,8/309,0), revelando uma valorização média das ações que o compõem.

## B. Noções estatísticas

1) *Variância*: De acordo com Spiegel [19], a variância  $\sigma^2$  de uma amostra  $X$  de  $n$  elementos,  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , e média denotada por  $\bar{X}$  é definida como:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n}. \quad (1)$$

<sup>1</sup>*Buffer* – Diferença entre capital mantido pelos bancos e o mínimo regulatório [15].

<sup>2</sup>*Free float* – Flutuação livre, indicador que determina o percentual de ações livres para negociação no mercado financeiro [17].

Tabela I  
IBOVESPA

Ação	Participação na Carteira	1º pregão	
		Preço da ação	Preço x Quantidade
A	60.000 ações	\$1,20	72.000
B	20.000 ações	\$2,70	54.000
C	40.000 ações	\$4,10	164.000
D	10.000 ações	\$1,90	19.000
Índice:			309.000 pontos
Ação	Participação na Carteira	2º pregão	
		Preço da ação	Preço x Quantidade
A	60.000 ações	\$1,30	78.000
B	20.000 ações	\$2,54	50.800
C	40.000 ações	\$4,10	164.000
D	10.000 ações	\$2,10	21.000
Índice:			313.800 pontos

Fonte: Adaptado de (Neto, 2010) [18].

É um conceito muito importante no mercado financeiro, pois ela ajuda a definir as características de um investimento [20]. Segundo Stanis (2023), “o que um alto grau de variância diz a um investidor é que o ativo em questão está sujeito a diferentes fontes de influência, ou que ele é muito dependente de um determinado fator” [20].

2) *Desvio padrão (DP)*: A raiz quadrada da variância é chamada desvio padrão [19]. O desvio padrão é amplamente usado no mercado financeiro e é a principal forma de calcular a volatilidade de um ativo. A fórmula do DP é simplesmente a raiz quadrada da variância [21]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n}}. \quad (2)$$

O desvio padrão é capaz de mensurar o quão homogênea é uma amostra de dados em comparação a outra, assim como também identifica quando uma amostra apresenta dados mais esparsos que outra [22].

3) *Covariância*: De acordo com Morettin [23], dados  $n$  pares de valores  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , chama-se de covariância entre duas amostras  $X$  e  $Y$ :

$$cov(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{n}, \quad (3)$$

ou seja, a média dos produtos dos valores centrados das variáveis.

Segundo Brum (2008), a covariância procura identificar como dois ativos se inter-relacionam, ou seja, como eles variam aos mesmo tempo em relação a seus valores médios [24].

4) *Correlação*: O coeficiente de correlação pode ser escrito como:

$$corr(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad (4)$$

onde

$corr(X, Y)$ : coeficiente de correlação da amostra;

$cov(X, Y)$ : covariância da amostra;

$\sigma_X$ : desvio padrão da amostra de  $X$ ;

$\sigma_Y$ : desvio padrão da amostra de  $Y$ .

No mundo das finanças, correlação é uma medida estatística para medir a forma como dois ativos se movimentam, um em relação ao outro. Quando os preços de dois ativos movimentam-se de forma similar, na mesma direção, usualmente, diz-se que eles são correlacionados. Já quando os ativos não se movimentam de forma similar, eles não são correlacionados [25]. A correlação é representada pelo coeficiente de correlação, variando entre  $-1$  e  $1$ .

A medida correlação varia de  $0$ , onde não existe nenhuma correlação, até  $+1$ , que significa perfeita correlação. Uma correlação de  $+1$  significa que os dois ativos andam de forma  $100\%$  similar ao longo do tempo. Por exemplo, quando as cotações do índice Bovespa sobem e as cotações de ações da Petrobras sobem de forma igual, com os mesmos percentuais de variação, pode-se dizer que os dois ativos são perfeitamente correlacionados ( $+1$ ) [25].

Por conseguinte, quando os dois ativos não têm nenhuma correlação ( $0$ ), ou seja, quando a variação do ativo não tem nenhuma “ligação” com a variação do outro, diz-se que estes ativos não são correlacionados [25].

Por outro lado, os ativos podem ser negativamente correlacionados ( $-1$ ). Isso ocorre quando os preços de dois ativos movimentam-se na direção oposta, sendo assim, quando um ativo sobe  $1\%$ , o outro cai  $1\%$ . Quando um ativo cai  $5\%$ , o outro sobe os mesmos  $5\%$  e assim por diante. Quando isso acontece, classificam-se estes ativos como perfeitamente negativamente correlacionados. Um exemplo disso dá-se quando as cotações das *small caps* (classe de empresas negociadas na bolsa que possuem menor valor de mercado) sobem ao passo que os preços dos títulos públicos caem no mesmo nível de magnitude ao longo do tempo, desta forma, pode-se concluir que estes ativos são negativamente correlacionados [25].

### C. Teoria de Markowitz

A teoria de Harry Markowitz (1952), economista americano, propõe que os investidores selecionem as carteiras não com base no desempenho individual de ativos, mas levando em consideração o desempenho da carteira de forma agregada [26]. A diversificação pode levar à construção de carteiras “mais eficientes”, em razão do efeito da correlação entre os ativos [26].

Os estudos de Markowitz liquidaram a concepção de que as estratégias ingênuas de diversificação, com a escolha aleatória dos títulos, trariam redução de risco na carteira [7]. Para que uma carteira tenha riscos menores que os ativos que a compõem individualmente, é necessário que os preços dos ativos não variem em conjunto na mesma direção e proporção [7], ou seja, considera-se a aleatoriedade do mercado. Apesar da análise técnica estudar diferentes formas de identificar tendências e momentos de entrada e saída de operações, ainda, assim, existe o risco da previsão estar errada, justamente devido à aleatoriedade do mercado [22].

Diante de tantas possibilidades, a teoria de Markowitz propõe a fronteira eficiente, que é determinada pelo conjunto de carteiras cuja rentabilidade não pode ser mais incrementada

sem que se aumente o risco, ou por outro lado, pelo conjunto de carteiras cujo risco não pode ser diminuído sem que se diminua a rentabilidade [6]. Ou seja, é o conjunto de carteiras cuja distribuição do peso dos ativos apresenta, para cada patamar de risco, o melhor retorno possível e, para cada patamar de rentabilidade, o menor risco possível [6].

O risco de um ativo isolado é dado pelo seu desvio padrão  $\sigma$  histórico. Enquanto que o risco de uma carteira é dado pela variância ( $\sigma^2$ ) entre os ativos presentes nessa carteira. Plotando um gráfico do risco do portfólio  $\sigma_P$  (eixo  $X$ ) pelo retorno esperado do portfólio (eixo  $Y$ ), o qual é dado pela ponderação do retorno esperado de cada ativo pelo seu peso na carteira, tem-se algo como apresentado na Figura 1.

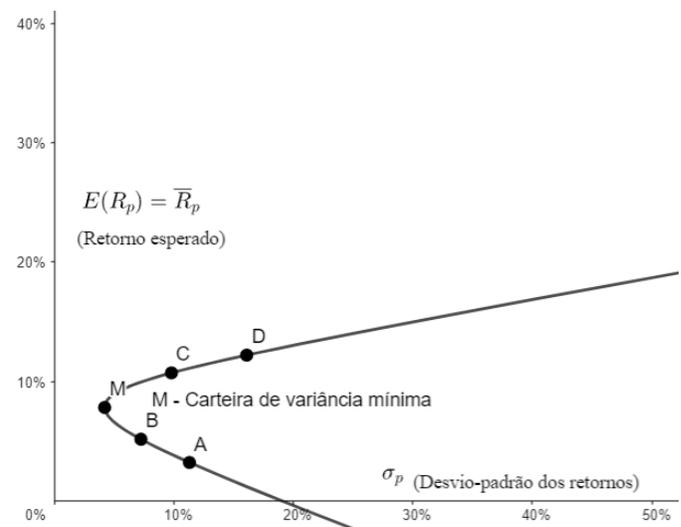


Figura 1. Representação Gráfica do Conjunto de Combinações. Adaptado de Assaf Neto, 2010 [18].

De acordo com Almodic (2010) [6], para obter o retorno da carteira basta calcular a média aritmética dos retornos esperados dos ativos ponderados pelas suas proporções. A equação matemática para o retorno da carteira é dada por:

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i. \quad (5)$$

Onde:

$R_p$  é o retorno da carteira;

$R_i$ , o retorno do ativo  $i$ ;

$n$ , o número de ativos na carteira;

$w_i$ , o peso do ativo  $i$  na composição da carteira.

### D. Programação linear e o método Simplex

Um problema de Programação Linear consiste em determinar o valor das  $n$  variáveis da função linear, ou objetivo, que será otimizada em um conjunto definido por  $m$  restrições [9].

Matematicamente, o termo Simplex pode ser definido como a região contida em  $\mathbb{R}^m$ , resultante da intersecção de semiespaços de  $n + 1$  vértices em  $N$  dimensões [27].

De acordo com Yoshida (1987) [28], o conjunto de soluções viáveis de um problema de Programação Linear é convexo

e tem sua solução ótima localizada em um ponto extremo (vértice) desse conjunto como mostra a Figura 2.

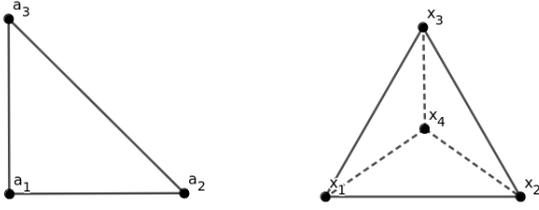


Figura 2. Representação de um polígono nos espaços  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Adaptado de Longaray, 2013 [27].

Para resolver um modelo de Programação Linear via Simplex, tem-se que reduzir o sistema algébrico correspondente à forma canônica. Isso significa adequar o modelo de Programação Linear à “linguagem” utilizada pelo Simplex [27].

A forma canônica de um modelo de Programação Linear pode ser representada por:

$$\begin{aligned} & \text{Max}\{Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n\} \\ \text{s.a.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned} \quad (6)$$

com  $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots; x_n \geq 0$ , onde  $x_i$  são classificados como as variáveis de decisão do problema e  $c_i$  os coeficientes de custo do mesmo, para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Para a resolução de problemas lineares é frequente o uso de variáveis de folga [9]. Toda desigualdade

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \leq b_j$$

pode ser convertida em uma igualdade por meio da introdução de uma variável adicional com condição de não negatividade, ou seja:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + x_{n+j} = b_j, \quad (7)$$

com  $x_{n+j} \geq 0$ .

A construção do quadro do Simplex é um procedimento simples, que consiste na colocação de todas as equações do modelo de Programação Linear em forma de um tableau como mostra a Tabela II.

Tabela II  
TABLEAU DO SIMPLEX.

$Z$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$x_{n+1}$	...	$x_{n+j}$	$\vec{b}$
1	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	...	0	0
0	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$	1	...	0	$b_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
0	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$	0	...	1	$b_m$

Fonte: Os autores

É necessário salientar que, para obter o termo independente ( $b_j$ ) da equação da função-objetivo, deve-se isolar  $Z$ , ou seja tomar  $Z = 0$ . Tal equação (em que  $Z = 0$ ) chama-se função objetivo transformada [27].

É possível visualizar na Tabela II, que as colunas  $x_{n+1}$  até  $x_{n+j}$ , que são variáveis de folga pertencentes às restrições do modelo, estão no formato básico. Logo,  $x_{n+1}$  até  $x_{n+j}$  são variáveis que compõem a solução básica inicial atribuindo-se 0 (zero) às variáveis originais.

Quando as restrições forem do tipo maior ou igual ( $\geq$ ), as variáveis de folga correspondentes são representadas por  $-x_{n+j}$ , o que impossibilita a obtenção de uma solução básica inicial apenas atribuindo o valor 0 às variáveis originais ( $x_1, x_2, \dots, n$ ). Para resolver esse problema, são introduzidas variáveis artificiais, geralmente denotadas como  $S_i$ , e, ao montar o tableau correspondente, a primeira etapa é eliminar as variáveis artificiais. Para este processo, é selecionada uma variável de entrada, que permita a linha de  $S_i$  ter o menor valor positivo resultante da divisão do termo independente pelo coeficiente da variável de entrada. A partir da determinação da solução básica inicial, um processo de permuta entre as variáveis básicas e não básicas é realizado. A variável que entra na base é aquela não básica com o coeficiente negativo mais significativo na linha da função objetivo transformada, e a variável que sai da base é aquela que possui o menor quociente resultante da divisão do termo independente, de uma restrição, pelo coeficiente da variável que entra nessa restrição.

Segundo Longaray (2013) [27], a definição do elemento pivô é dada pela intersecção da coluna dos coeficientes da variável que entra na base com a linha dos coeficientes da variável que sai da base.

O cálculo da nova linha pivô é dado pela divisão, termo a termo, da linha da variável, que sai pelo elemento pivô, e das demais novas linhas do quadro é realizado tomando por base os valores da nova linha pivô [27].

### E. Python

Python é uma linguagem de programação criada pelo holandês Guido van Rossum, na década de 1980, podendo ser considerada um projeto de desenvolvimento de software de código-fonte aberto, ou seja, permite o estudo e modificação livre. É uma linguagem que, de forma precisa, torna os programas mais legíveis, possui uma vasta biblioteca (local onde encontram-se algoritmos que auxiliam no desenvolvimento de programas) que permite o desenvolvimento de aplicações robustas, mas aparência simples [29].

O setor financeiro tem se beneficiado com o uso e aprimoramento da linguagem Python para analisar dados que entregam informações valiosas para auxiliar na tomada de decisões. Por conta de sua singularidade e robustez, é capaz de facilitar a rotina e agregar valor econômico às instituições financeiras que sabem “tirar proveito” da sua empregabilidade. Um exemplo notável é a biblioteca *yfinance* (<https://pypi.org/project/yfinance/>), que simplifica a coleta de dados financeiros diretamente do *Yahoo Finance*

(<https://finance.yahoo.com/>), site de notícias e dados do mercado financeiro em uma plataforma como na Figura 3.

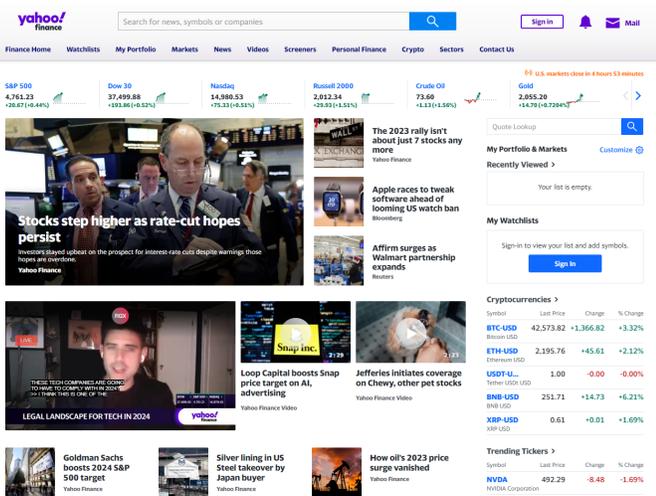


Figura 3. Plataforma do site Yahoo Finance.  
Fonte: Yahoo Finance (<https://finance.yahoo.com/>).

O Yahoo Finance é um dos mais importantes portais de notícia sobre mercado e uma das maiores bases de dados do mercado financeiro disponível na internet de forma gratuita. Ele conta não apenas com cotações, mas com um vasto universo de informações sobre ações, que em outros meios podem ser difíceis de serem encontradas [30]. Através de sua interface amigável, *yfinance* oferece acesso a uma gama abrangente de informações financeiras, desde dados históricos de preços de ações até dados de mercado, permitindo análises detalhadas para embasar decisões cruciais. Além disso, trata-se da biblioteca de extração de dados mais utilizada em projetos no GitHub [31]. A escolha da biblioteca *yfinance* como ferramenta para o estudo proposto deve-se ao fato de sua integração com a linguagem Python e pela verificação de seu emprego em trabalhos relacionados durante a revisão bibliográfica.

Dentre as milhares bibliotecas Python, destaca-se, também, a *PuLP* (<https://pypi.org/project/PuLP/>): uma solução eficiente para modelagem e resolução de problemas de Programação Linear. Com uma interface intuitiva, a *PuLP* capacita os usuários a formular e solucionar uma variedade de desafios complexos de otimização matemática, abrangendo desde alocação de recursos até planejamento de produção e problemas de transporte.

Ao explorar essas bibliotecas e outras ferramentas especializadas em Python, evidencia-se o motivo pelo qual Python tornou-se a linguagem escolhida em diversas áreas, incluindo finanças, métodos matemáticos e uma infinidade de outros campos em constante evolução.

### III. METODOLOGIA

A metodologia proposta, para a composição de carteiras, começa identificando os diferentes setores, como o de utilidade pública, o bancário e o de alimentos processados, selecionando

ações, em cada setor, desde julho de 2022 até julho de 2023. Em seguida, analisam-se as correlações entre as ações escolhidas para construir carteiras setoriais com baixas correlações internas. Isso deve-se ao fato de que uma baixa correlação interna indica que as ações fazem parte do mesmo setor. Essas carteiras são avaliadas individualmente em termos de retorno. Depois, as carteiras setoriais são combinadas em uma carteira global, ponderando cada setor com base em critérios relevantes, como o de diversificação de carteiras proposta por Markowitz. Por fim, aplica-se o método Simplex para otimizar a alocação de ativos na carteira global, maximizando o retorno esperado com restrições de risco. Essa abordagem busca a diversificação eficiente e a maximização de retornos em um portfólio de investimentos.

#### A. Análise das ações para compor a carteira

Para selecionar a melhor combinação, ou carteira de títulos, para fins de aplicação, o investidor deve escolher uma carteira com um retorno esperado alto e um desvio-padrão baixo [5]. Para isso, deve considerar:

- A relação entre retorno esperado de títulos isolados e o retorno esperado de uma carteira formada por esses títulos.
- A relação entre os desvios-padrão dos retornos de títulos isolados, as correlações entre os retornos desses títulos e o desvio-padrão do retorno de uma carteira formada por esses títulos.

Neste trabalho foram escolhidas para análise nove ações de três setores diferentes [32]:

- Empresas de utilidade pública (SABESP, ELETROBRAS, ENERGISA): nesse campo encontram-se as principais empresas que prestam serviços de utilidade pública, como por exemplo, saneamento básico e distribuição de energia elétrica [32]. Neste trabalho compõem a denominada carteira 1.
- Empresas que se enquadram em setor bancário/financeiro (Itaú Unibanco, Bradesco, Santander): aqui encontram-se as principais empresas que prestam serviços na área financeira ou bancária [32]. Neste trabalho compõem a denominada carteira 2.
- Empresas que se enquadram em setor de alimentos processados (BRF, JBS, Marfrig): nesse campo encontram-se as principais empresas em produção de alimentos processados [32]. Neste trabalho compõem a denominada carteira 3.

Para importação dos dados da bolsa de valores [32], utilizou-se a biblioteca em Python *yfinance* como mostra a Figura 4.

### IV. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para a obtenção dos resultados, analisaram-se as correlações das ações que formam as carteiras, como mostra a Figura 5, permitindo a confirmação de correlações negativas entre os setores.

O retorno percentual de cada carteira, com pesos, para cada um dos ativos, iguais, foi calculado a partir do tratamento

```
#instalar bibliotecas
%pip install yfinance

#importar biblioteca
import yfinance as yf

#declarar as ações de análise
acoes = {'SBSP3.SA', 'ELET3.SA', 'ENGI3.SA', 'ITUB3.SA', 'BBDC3.SA', 'BCSA34.SA', 'BRFS3.SA', 'JBSS3.SA', 'MRFG3.SA'}

#montar a carteira para a data informada
carteira = yf.download(acoes1, start="2022-07-01", end="2023-07-01", progress=False)['Adj Close']
```

Figura 4. Utilização da biblioteca yfinance no Python.  
Fonte: Os Autores.

	BRFS3.SA	JBSS3.SA	MRFG3.SA	ITUB3.SA	BBDC3.SA	BCSA34.SA	SBSP3.SA	ENGI3.SA	ELET3.SA
BRFS3.SA	1.0	0.923744	0.945903	-0.10509	0.751197	-0.900509	-0.379233	0.471243	0.818271
JBSS3.SA	0.923744	1.0	0.955554	-0.357546	0.51262	-0.838976	-0.431358	0.366269	0.81327
MRFG3.SA	0.945903	0.955554	1.0	-0.168117	0.646192	-0.848426	-0.385124	0.477875	0.826406
ITUB3.SA	-0.10509	-0.357546	-0.168117	1.0	0.51441	0.038161	0.622086	0.471261	0.083437
BBDC3.SA	0.751197	0.51262	0.646192	0.51441	1.0	-0.730598	0.001672	0.61289	0.681598
BCSA34.SA	-0.900509	-0.838976	-0.848426	0.038161	-0.730598	1.0	0.197679	-0.495644	-0.878959
SBSP3.SA	-0.379233	-0.431358	-0.385124	0.622086	0.001672	0.197679	1.0	0.299315	0.059555
ENGI3.SA	0.471243	0.366269	0.477875	0.471261	0.61289	-0.495644	0.299315	1.0	0.687931
ELET3.SA	0.818271	0.81327	0.826406	0.083437	0.681598	-0.878959	0.059555	0.687931	1.0

Figura 5. Correlações entre as ações.  
Fonte: Os Autores.

dos dados, a fim de torná-los percentuais acumulados, como mostra a Figura 6. A análise gráfica, para cada uma das carteiras, também foi realizada, como mostram as Figuras 7, 8 e 9.

```
[ ] acoes1 = {'SBSP3.SA', 'ELET3.SA', 'ENGI3.SA'}
carteira1 = yf.download(acoes1, start="2022-07-01", end="2023-07-01", progress=False)['Adj Close']
retorno1 = carteira1.pct_change()
retorno_percentual1 = (1 + retorno1).cumprod()
retorno_percentual1.iloc[0] = 1
retorno_percentual1['Saldo'] = retorno_percentual1.sum(axis=1)
retorno_percentual1['Retorno'] = retorno_percentual1['Saldo'].pct_change()
retorno_percentual1['Retorno'].plot(title="Retorno percentual carteira 1")
```

Figura 6. Tratamento de dos dados das ações.  
Fonte: Os Autores.

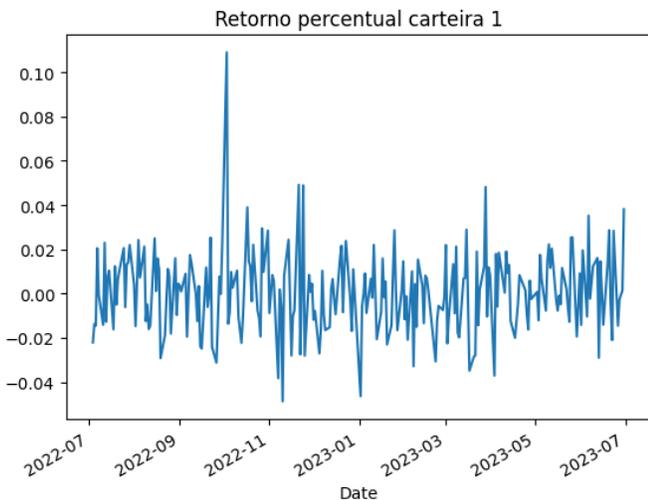


Figura 7. Carteira 1 de ações setor público.  
Fonte: Os Autores.

Através dessa análise, foram obtidos os retornos anuais de cada carteira: carteira 1 (SABESP, ELETROBRAS, ENER-

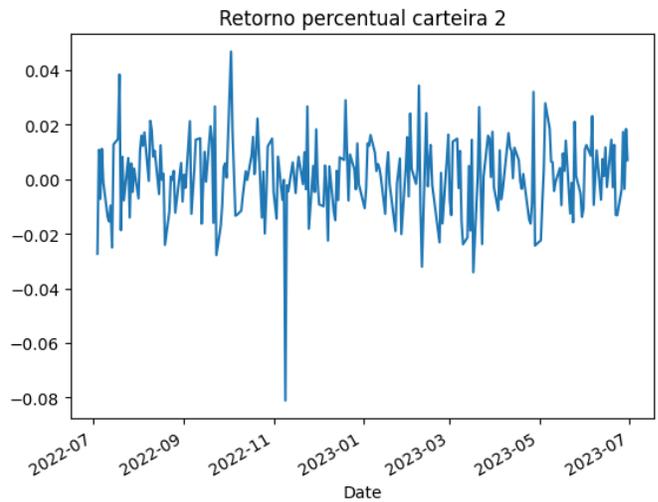


Figura 8. Carteira 2 de ações setor bancário.  
Fonte: Os Autores.

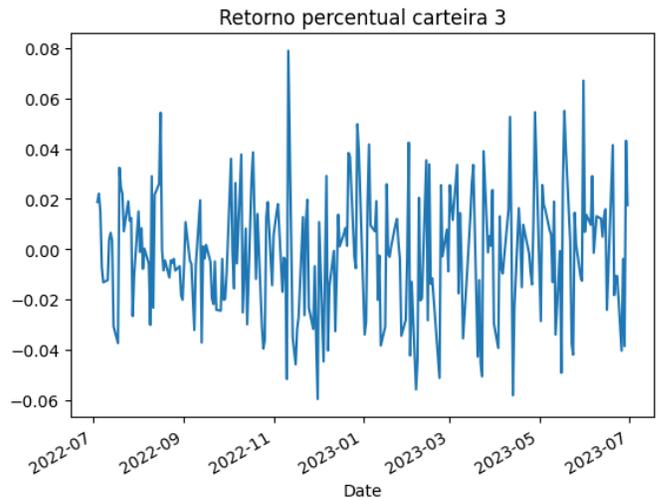


Figura 9. Carteira 3 de ações setor alimentício.  
Fonte: Os Autores.

GISA) (12, 34%), carteira 2 (Itaú Unibanco, Bradesco, Santander) (22, 10%) e carteira 3 (BRF, JBS, Marfrig) (-36, 13%).

Além disso, atribuindo pesos iguais para cada ativo, foi analisada a carteira geral contendo todos os ativos. Obteve-se um retorno anual para a carteira geral de 2,08% demonstrando, assim, que a diversificação diminui o risco, como pode ser analisado na Figura 10. Porém, o retorno diminuiu significativamente.

A fim de maximizar o retorno anual, onde as variáveis serão os pesos aplicados a cada ativo e as constantes, os retornos anuais das carteiras, foi modelado um problema de Programação Linear. Para garantir a diversificação, foram definidas restrições nos pesos de cada carteira como mostram as equações (9), (10), (11), (12) e (13).

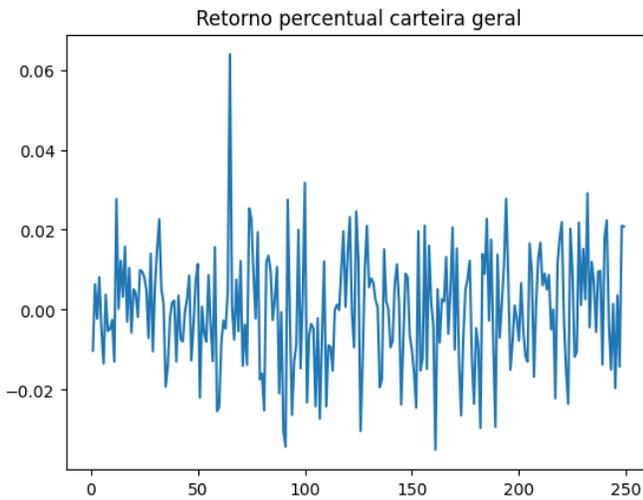


Figura 10. Carteira de ações combinadas.  
Fonte: Os Autores.

```

prob = p.LpProblem('Rentabilidade', p.LpMaximize)

#Setando as variáveis de decisão
w1 = p.LpVariable('w1', lowBound=0)
w2 = p.LpVariable('w2', lowBound=0)
w3 = p.LpVariable('w3', lowBound=0)

#Criando a função objetivo
prob += retorno_anual1*w1 + retorno_anual2*w2 + retorno_anual3*w3

#Criando as restrições e parâmetros.
prob += w1 + w2 + w3 ==1
prob += w1 <=0.80
prob += w2 <=0.80
prob += w3 <=0.80
prob += w1 + w3 <=0.5
prob += w1 + w2 >=0.5
prob += w1 >=0
prob += w2 >=0
prob += w3 >=0

#Resolvendo o Problema
status = prob.solve()
print(f'Retorno anual: {p.value(prob.objective)}')

#Exibindo a solução final
print(f'Carteira 1:{p.value(w1):.1%}\nCarteira 2:{p.value(w2):.1%}\nCarteira 3:{p.value(w3):.1%}')

Retorno anual: 20.149824755595457
Carteira 1:20.0%
Carteira 2:80.0%
Carteira 3:0.0%

```

Figura 11. Utilização da biblioteca *PuLP* em Python.  
Fonte: Os Autores.

$$\text{Max}\{R_p = 0,1234 \cdot w_1 + 0,2210 \cdot w_2 - 0,3613 \cdot w_3\}, \quad (8)$$

$$\text{s.a. } w_1, w_2, w_3 \geq 0, \quad (9)$$

$$w_1 + w_2 + w_3 \leq 1, \quad (10)$$

$$w_1, w_2, w_3 \leq 0,8, \quad (11)$$

$$w_1 + w_3 \leq 0,5, \quad (12)$$

$$w_1 + w_2 \leq 0,5. \quad (13)$$

A solução do problema proposto foi obtida por meio da biblioteca *PuLP* e da linguagem de programação Python [32] (Figura 11). O retorno anual ótimo foi de 20,14% com pesos de  $w_1 = 20\%$ ,  $w_2 = 80\%$  e  $w_3 = 0\%$ , obtendo-se, assim, um maior retorno, com um risco menor proporcionado pela diversificação (Figura 12).

Conclui-se que a porcentagem de qualquer aporte para melhor retorno do portfólio é 20% para a carteira 1 (composta por SABESP, ELETROBRÁS e ENERGISA), 80% para a carteira 2 (composta por Itaú Unibanco, Bradesco e Santander) e 0% para a carteira 3 (composta por BRF, JBS e Marfrig). Por exemplo, um aporte de R\$3000,00 aplicado na carteira geral, em um ano teria o retorno de R\$3062,64. Já aplicado de acordo com os cálculos do Simplex, teria um retorno de R\$3604,20. Assim, em um ano o investidor já teria a diferença de R\$541,52 ou um retorno dez vezes maior e como trata-se de uma carteira que leva em conta restrições de diversificação, como diz a teoria de Markowitz, diminui o risco de perda por aportar em diferentes setores.

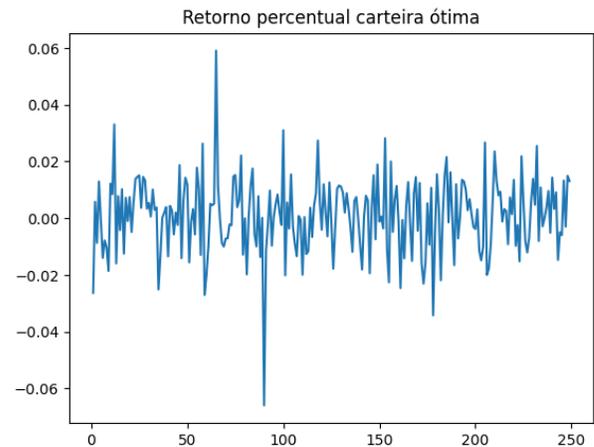


Figura 12. Retorno percentual carteira ótima.  
Fonte: Os Autores.

## V. CONCLUSÕES

O estudo apresentado teve como principal objetivo a construção de uma carteira de investimentos diversificada e eficiente no contexto do mercado de ações. Durante o processo, foram empregados a teoria de Markovitz e conceitos estatísticos. A fim de obter uma carteira equilibrada, com um retorno esperado maximizado, utilizaram-se técnicas de Programação Linear, o método Simplex e a linguagem de programação Python. Os resultados demonstram a eficácia da abordagem proposta na obtenção de retornos significativos com um nível aceitável de risco, ilustrando a importância da diversificação e do uso de ferramentas estatísticas e matemáticas na tomada de decisões de investimento no mercado de ações.

Além disso, foi possível demonstrar que métodos de Programação Linear, como o Simplex, são uma ferramenta

de grande importância para alocação de recursos e na solução de diversos problemas na área econômica.

Vale ressaltar que a linguagem Python mostrou-se eficiente, seja pela praticidade ou pela clareza do algoritmo. A ferramenta oferece facilidade tanto no tratamento, quanto na coleta da grande quantidade de dados. Destaca-se ainda o emprego da biblioteca *yfinance*, que permitiu o download das informações demandadas pela metodologia empregada neste trabalho, de maneira prática e rápida.

Como proposta de continuidade propõe-se o estudo sobre métodos gráficos, como o cruzamento de médias móveis de diferentes períodos para a definição de momentos de compra e venda de ações.

#### AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, através do Programa Institucional de bolsas de Iniciação Científica – PIBIC, pelo auxílio financeiro que possibilitou a dedicação ao projeto.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Brasil, “O que é uma ação?” <https://www.gov.br/investidor/pt-br/investir/tipos-de-investimentos/acoes/o-que-e-uma-acao>, [Acessado em: 18 out. 2023].
- [2] M. A. M. Cintra and K. da Rocha Gomes, *As transformações no sistema financeiro internacional*. Brasília: Ipea, 2012.
- [3] X. Educação, “Saiba o que é portfólio de investimentos e como montar um em apenas 3 passos,” <https://blog.xpeducacao.com.br/o-que-e-portfolio-investimentos/>, [Acessado em: 18 out. 2023].
- [4] C. M. Mendes, C. A. D. O. Tredezini, F. T. D. M. Borges, and M. B. B. Fagundes, *Introdução à economia*. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.
- [5] T. V. Santiago, *Teoria de Markowitz e programação linear para composição de uma carteira ótima de investimentos*. Sorocaba: Universidade Federal de São Carlos, 2018.
- [6] G. A. Almocid, *Aplicabilidade da teoria de Markowitz*. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2010.
- [7] W. V. Silva, A. G. Lins, L. Gomes, and S. Marques, “Formulação de carteiras hipotéticas de ativos financeiros usando a técnica multivariada de análise de agrupamento,” *Revista Universo Contábil*, 2009.
- [8] L. P. Fávero and P. Belfiore, *Pesquisa Operacional: Para cursos de Engenharia*. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda, 2013.
- [9] J. J. Judice, P. C. Martins, M. M. B. Pascoal, and J. P. Santos, *Programação linear*. Coimbra: Universidade de Coimbra/ Departamento de Matemática, 2009.
- [10] R. Pesente, *Mercados Financeiros*. Bahia: Universidade Federal da Bahia, 2019.
- [11] W. Magazine, “Corretora de investimentos: entenda como funciona e aprenda a comparar,” <https://warren.com.br/magazine/corretora-de-investimentos/>, [Acessado em: 17 dez. 2023].
- [12] G. Maia, “Investir na bolsa de valores? veja o que é e como funciona!” <https://conteudos.xpi.com.br/aprenda-a-investir/relatorios/bolsa-de-valores/>, [Acessado em: 18 out. 2023].
- [13] B3, “Índice bovespa (ibovespa b3),” [https://www.b3.com.br/pt\\_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/ibovespa.htm](https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/ibovespa.htm), [Acessado em: 18 out. 2023].
- [14] T. Reis, “O que são units? entenda como funciona esse tipo de ação,” <https://www.suno.com.br/artigos/units/>, [Acessado em: 18 out. 2023].
- [15] B. G. F. Moura, “Diferentes riscos, diferentes regras: como as características das instituições bancárias influenciam o risco financeiro sistêmico,” Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração, Belo Horizonte, Minas Gerais, 2021.
- [16] X. Investimentos, “As ações de OI e OGX viraram penny stock. o que significa?” <https://conteudos.xpi.com.br/aprenda-a-investir/relatorios/acoes-penny-stock/>, [Acessado em: 20 out. 2023].
- [17] C. Now, “O que é free float e qual a sua importância para as ações,” <https://www.capitalresearch.com.br/blog/investimentos/free-float/>, [Acessado em: 20 out. 2023].
- [18] A. A. Neto, *Mercado financeiro*. São Paulo: Atlas, 2010.
- [19] M. R. Spiegel, *Probabilidade e estatística*. São Paulo: McGraw-Hill, 1978, (Coleção Schaum).
- [20] B. Stanis, “O que é variância?” <https://www.analisedeacoes.com/dicionario/v/variância/>, 2023, [Acessado em: 18 dez. 2023].
- [21] N. B. Moura, “Estatística para investidores,” <https://medium.com/@nataliamourv/estatistica-para-investidores-parte-1-9c922f3302f6>, [Acessado em: 17 dez. 2023].
- [22] C. M. de Freitas Junior, “Minimização do risco de carteiras de investimento através da programação linear e da teoria de Markowitz,” Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Sorocaba, São Paulo, 2022.
- [23] P. A. Morettin and W. O. Bussab, *Estatística básica*. São Paulo: Saraiva, 2017.
- [24] F. M. Brum, “Aplicação da teoria de Markowitz e índice sharpe em um clube de investimento,” Especialização, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2008.
- [25] Nelogica, “Correlação - a importância deste conceito da estatística nos investimentos,” <https://www.nelogica.com.br/conhecimento/artigos/indicadores-estudo/correlacao-estatistica-investimentos>, [Acessado em: 17 dez. 2023].
- [26] H. Markowitz, “Portfolio selection,” *The Journal Of Finance*, pp. 77–99, 1952.
- [27] A. A. Longaray, *Introdução à pesquisa operacional*. São Paulo: Saraiva, 2013.
- [28] L. K. Yoshida, *Programação linear*. São Paulo: Atual, 1987.
- [29] L. Perkovic, *Introdução à Computação Usando Python - Um Foco no Desenvolvimento de Aplicações*. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2016.
- [30] E. Prado, “Como extrair dados de ações do yahoo finance no Python?” <https://www.linkedin.com/pulse/como-extrair-dados-de-ações-do-yahoo-finance-python-emanuel-prado/?originalSubdomain=pt>, [Acessado em: 17 dez. 2023].
- [31] LibHunt, “pandas-datereader vs yfinance,” <https://www.libhunt.com/compare-pandas-datereader-vs-yfinance>, [Acessado em: 17 dez. 2023].
- [32] F. Sembay, “Análise de carteira de investimento utilizando Python,” <https://www.linkedin.com/pulse/análise-de-carteira-investimento-utilizando-python-felipe-sembay/>, [Acessado em: 18 out. 2023].